H. J. Fink

Frankfurt am Main 1973.

# Kollektive Massenparameter in der Schwerionenstreuung

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der

Naturwissenschaften

vorgelegt beim

Fachbereich Physik

der

Johann Wolfgang Goethe-Universität

zu

Frankfurt am Main

von

Hans-Joachim Fink

aus

Frankfurt/M - Höchst

Frankfurt am Main

November 1973

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Physik der
Universität Frankfurt am Main.

| | |
|---|---|
| Dekan: | Prof. Dr. H. A. Müser |
| Erster Berichterstatter: | Prof. Dr. W. Greiner |
| Zweiter Berichterstatter: | Prof. Dr. W. Scheid |
| Sonderberichterstatter: | Prof. Dr. A. Faessler (Jülich) |
| Tag der mündlichen Prüfung: | 21.12.73 |

I N H A L T


I.) Einleitung 1

II.) Schrödingergleichung in kollektiven Koordinaten 2

1.) Klassische Hamiltonfunktion 2

2.) Quantisierung der klassischen Hamiltonfunktion 4

2.1) Quantisierungsvorschrift 4

2.2) Transformation der Differentialgleichung 6

2.3) Spezialfall r-abhängiger Massen 9

3.) Rotationsinvariante Struktur der Massen 12

3.1) Invariante Ansätze 12

3.2) Invariante Struktur der Schrödingergleichung 15

3.3) Lösung der Schrödingergleichung 17

III.) Berechnung der Massen im Zwei-Zentren-Modell 19

1.) Massen im Cranking-Modell 19

2.) Massen im Zwei-Zentren-Modell 21

2.1) Definition der Koordinaten 21

2.2) Berechnung der Massen 24

3.) Kollektive Massen für Transfer-Prozesse 30

3.1) Kollektive Asymmetrievariable 30

3.2) Einfluß der Auffüllvorschrift 33

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41523706_0032

4.) Rechnungen für $^{12}C$ - $^{12}C$ und $^{16}O$ - $^{16}O$ 34

IV.) Zusammenfassung und Ausblick 39

V.) Anhang 41

A.) Transformation der Differential-gleichung 41

B.) Rotationsinvarianz 49

C.) Inversion bei Entartung 61

D.) Berechnung der Massen im Zwei-Zentren-Modell 65

VI.) Figuren 70

VII.) Referenzen 75

## I.) Einleitung

Die Schwerionenphysik ist eines der wichtigsten Gebiete in der heutigen Kernphysik. Es wurden bisher eine große Anzahl von Kern-Kern-Reaktionen gemessen[1] und theoretisch untersucht[2].

Aus der Analyse der Anregungsfunktionen dieser Reaktionen lassen sich Aussagen über die Streupotentiale, die in diesen Prozessen auftreten, gewinnen. Über die Kenntnis der Absorption aus diesen Reaktionskanälen erhält man Aussagen über die Compoundkernbildung während der Reaktion. Eine genaue Kenntnis dieser Größen ist vor allem im Hinblick auf die mögliche Bildung von superschweren Kernen wichtig, da diese Kerne als Produkte von Kernverschmelzungen erzeugt werden sollen[3].

Bisher wurden in den optischen Modell-Analysen die asymptotischen Massenparameter zugrunde gelegt. Aus den Anregungsfunktionen und Winkelverteilungen der Reaktionsprodukte wurden daher Aussagen über Potentiale und Kopplungspotentiale zwischen den Kernen erhalten. Zusatzpotentiale, die auf Grund von ortsabhängigen Massen auftreten, wurden in den Arbeiten von Lichtner et al.[4] und Mosel et al.[5] untersucht.

In diesen Arbeiten wurde nur der Relativabstand als Freiheitsgrad zugelassen. Da es bekannt ist, daß die Ankopplung der Oberflächenschwingungen und Rotationen der Kerne an die Relativbewegung einen großen Einfluß auf den Streuprozess hat[6,7], soll in dieser Arbeit untersucht werden, wie die Massenparameter in diesen kollektiven Koordinaten in den Streuformalismus eingehen.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Im ersten Teil wird die Schrödingergleichung für den Streuprozess unter Berücksichtigung kollektiver Koordinaten untersucht. Im zweiten Teil werden die kollektiven Massen für die Relativbewegung und die Oberflächenschwingungen im Cranking Modell[8] berechnet. Es wird weiterhin an Hand der $^{12}C$-$^{12}C$ und $^{16}O$-$^{16}O$ Streuung untersucht, wie die Ortsabhängigkeit dieser Massen die Streuung beeinflußt.

## II.) Schrödingergleichung in kollektiven Koordinaten

### 1.) klassische Hamiltonfunktion

Da es unmöglich ist, einen Kern-Kern-Streuprozess exakt, d.h. in allen Nukleonenkoordinaten zu beschreiben, muß man sich auf einige wichtige (kollektive) Freiheitsgrade beschränken. Zur Beschreibung des Streuprozesses sind folgende Koordinaten wichtig: die Relativkoordinate $\vec{r}$ zwischen den beiden Kernen und die Oberflächenkoordinaten $\alpha^{(i)}_{\lambda\mu}$, i = 1,2 der individuellen Kerne[7]. Es wurde auch vorgeschlagen, den Nukleonenaustausch während des Stoßes durch eine Asymmetriekoordinate zu beschreiben[9].

Es existieren zwei Möglichkeiten, diese kollektiven Koordinaten in die Streutheorie einzuführen. Sie können zusätzlich zu den Nukleonenkoordinaten eingeführt werden; das System ist dann überbestimmt. Der Einfluß der redundanten Koordinaten läßt sich näherungsweise eliminieren, wenn man als kollektive Massen die Massen verwendet, die man im Cranking-Modell erhält[10]. Das System kann dann in den kollektiven Koordinaten quantisiert werden.

Die zweite Möglichkeit wird als Generatorkoordinatenmethode[11] bezeichnet. In ihr geht man von einer Wellenfunktion $\varphi(r, y_i)$ aus, die außer von den inneren Koordinaten $y_i$ noch von den kollektiven Koordinaten, hier dargestellt durch r, abhängen. Man erhält die Nukleonen-Wellenfunktion $\Psi$ durch eine Integration über die kollektiven Koordinaten mit einer Testfunktion $f(r)$:

$$\Psi(y_i) = \int dr\, f(r)\, \varphi(r, y_i)$$

Die Funktion $f(r)$ beschreibt die Bewegung des Systems in den kollektiven Koordinaten. Die Differentialgleichung für diese Funktion folgt aus einem Variationsprinzip.
Diese Methode vermeidet eine Beschreibung des Systems durch überzählige Koordinaten. Da die Generatorkoordinatenmethode jedoch zu numerischen Schwierigkeiten führt, wird in dieser Arbeit das zuerst beschriebene Verfahren zugrunde gelegt.
Wir bezeichnen die kollektiven Koordinaten mit $x^i$, i = 1, . . ., N. Es sei $x^1 \equiv r$, der Betrag des Relativabstandes zwischen den Kernen. Die restlichen Koordinaten $x^i$, i = 2,..., N stellen dann alle anderen kollektiven Koordinaten dar, wie die Orientierung der Relativkoordinate im Raum, Oberflächenkoordinaten der individuellen Kerne oder andere Koordinaten.
Es sollen folgende Konventionen gelten:

a) lateinische Buchstaben i, j, . . .
laufen stets von 1 bis N; griechische Buchstaben $\mu, \nu, \ldots$ dagegen von 2 bis N, d.h. die Relativkoordinate ist ausgeschlossen.

b) kommen gleiche Indices mehrmals vor, so ist über sie zu summieren.

Die Gesamtenergie H des Systems kann in einen kinetischen und einen potentiellen Anteil zerlegt werden:

$$H(x^i, \dot{x}^i) = T(x^i, \dot{x}^i) + V(x^i) \qquad (2.1)$$

Die Hamiltonfunktion (2.1) muß zeitumkehrinvariant sein[12]. Sie kann daher die Geschwindigkeiten $\dot{x}^i$ nur in geraden Potenzen enthalten. In niedrigster Ordnung sind die kollektiven Massen geschwindigkeitsunabhängig. Die kinetische Energie kann dann folgendermaßen geschrieben werden:

$$T = \frac{1}{2} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k \qquad (2.2)$$

Die kollektiven Massen $g_{ik}$ können dabei von allen Koordinaten abhängen.

Im allgemeinen genügt die Hamiltonfunktion (2.1) weiteren Symmetrien, wie Invarianz gegen Raumdrehungen und Raumspieglung sowie Translationsinvarianz[12]. Da die Quantisierungsvorschrift nicht von diesen Symmetrien abhängt, werden die Einflüsse dieser Invarianzen auf die Hamiltonfunktion erst später untersucht.

Der Übergang von der klassischen Physik zur Quantenmechanik betrifft nur den kinetischen Teil der Hamiltonfunktion. Wir werden daher vorerst nur diesen Anteil diskutieren.

## 2.) Quantisierung der klassischen Hamiltonfunktion

### 2.1) Quantisierungsvorschrift

Die Quantisierung kann auf folgende Art durchgeführt werden[12]:

Man definiert einen Raum durch die Metrik:

$$ds^2 = 2T\,dt^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k \qquad (2.3)$$

Ist dieser Raum euklidisch, so existieren Koordinationen $y^i(x^j)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$ds^2 = \delta_{ik}\,dy^i\,dy^k \qquad (2.4)$$

In diesen (kartesischen) Koordinaten kann wie üblich quantisiert werden ($y^i \rightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y^i}$). Transformiert man zurück zu den ursprünglichen Koordinaten $x^i$, dann erhält man:

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2}\, g^{-1/2}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\, g^{ik}\, g^{1/2}\,\frac{\partial}{\partial x^k} \qquad (2.5)$$

mit:
$$g := det\,(g_{ik}) \qquad (2.6)$$
$$g_{ie}\,g^{ek} = \delta_i^{\ k}$$

Ob die Metrik (2.3) euklidisch ist oder nicht, kann man entscheiden, wenn man den Krümmungstensor[31] berechnet. Er hängt nur von den Größen $g_{ik}$ und ihren Ableitungen ab. Der Raum ist genau dann euklidisch, wenn der Krümmungstensor überall verschwindet.

Im allgemeinen bescheibt die Metrik (2.3) einen nicht-euklidischen Raum, da man bei der Berechnung der $g_{ik}$ über die Nukleonenkoordinaten mittelt. Es können daher Zusatzterme zu Gleichung (2.5) auftreten, die jedoch so beschaffen sein müssen, daß sie im Grenzfall des euklidischen Raumes verschwinden. Jensen und Koppe[13] haben die Bewegungsgleichungen eines Teilchens untersucht, welches durch Zwangskräfte gezwungen wurde, sich auf einer zweidimensionalen, gekrümmten Fläche zu bewegen.

(Der nichteuklidische Raum ergibt sich dabei als eine zweidimensionale, gekrümmte Fläche in einem euklidischen dreidimensionalen Raum.) Sie erhielten einen Zusatzterm, der von den Krümmungsradien $R_1$ und $R_2$ der Fläche und der Teilchenmasse m abhängt:

$$V_{add} = -\frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2 \qquad (2.7)$$

Dieser Zusatzterm verschwindet für Kugeloberflächen ($R_1 = R_2$) und für einen euklidischen Raum ($R_1 \to \infty$ , $R_2 \to \infty$ )[14]. Die allgemeine Struktur solcher Zusatzterme wurde von Hofmann[15] untersucht.

Da die Frage, wie die Zusatzterme wirklich aussehen, bisher noch nicht geklärt worden ist, werden wir uns als Quantisierungsvorschrift auf Beziehung (2.5) beschränken.

## 2.2) Transformation der Differentialgleichung

Der quantenmechanische kollektive Hamiltonoperator hat folgende Gestalt:

$$\hat{H} = \hat{T}\left(x^i, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) + V(x^i) \qquad (2.8)$$

mit

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2} g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^i} g^{ik} g^{1/2} \frac{\partial}{\partial x^k} \qquad (2.9)$$

In der Streutheorie ist man besonders an der Differentiation nach der Relativkoordinate interessiert (man beachte die Summationskonvention):

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2}\Big\{ g^{11}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \Big( g^{-1/2}\Big(\frac{\partial}{\partial r}\big(g^{1/2} g^{11}\big)\Big) + g^{-1/2}\Big(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\big(g^{1/2} g^{1\mu}\big)\Big) + 2\, g^{1\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big)\frac{\partial}{\partial r} + \Big( g^{-1/2}\Big(\frac{\partial}{\partial r}\big(g^{1/2} g^{1\mu}\big)\Big)\frac{\partial}{\partial x^\mu} + g^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x^\mu} g^{1/2} g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big)\Big\} \tag{2.10}$$

Üblicherweise transformiert man in der Streutheorie den Hamiltonoperator $\hat{H}$ mit einem Operator $\hat{S}$ auf eine Form, in der der lineare Operator $\frac{\partial}{\partial r}$ verschwindet:

$$\hat{H} \rightarrow \hat{S}^{-1}\,\hat{H}\,\hat{S} \tag{2.11}$$

$\hat{S}$ besitzt folgende Struktur (siehe Anhang A):

$$\hat{S} = \alpha \cdot e^{:\sigma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}:} \tag{2.12}$$

Hierbei bedeutet das Symbol ":  :", daß in der Potenzreihenentwicklung dieses Operators alle Funktionen $\sigma^\mu$ vor allen Operatoren $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ stehen sollen.
Die Funktionen $\sigma^\mu$ und $\alpha$ erfüllen partielle Differentialgleichungen:

$$g^{1i}\frac{\partial}{\partial x^i}\sigma^\mu + g^{1\mu} = \sigma \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\big(\alpha\, g^{1/4}\,(g^{1i})^{1/2}\big) = \sigma \tag{2.14}$$

(Man beachte, daß i von 1 bis N, $\mu$ jedoch von 2 bis N läuft.)

$\sigma^\mu$ genügt folgender Randbedingung:

$$\sigma^\mu (r \to \infty, x^\nu) = \sigma \tag{2.15}$$

Für große r ($r \gg R_{kr}$) verschwinden die Massen $g^{1\mu}$ und die Masse $g^{11}$ geht in die Inverse der reduzierten Masse m über. Asymptotisch erhält man aus Gleichung (2.14):

$$\frac{\partial}{\partial r} (\alpha g^{1/4}) = \sigma \qquad r \gg R_{kr} \tag{2.16}$$

$$\alpha \sim g^{-1/4}$$

Die Determinante hängt dann nur über das Tragheitsmoment von r ab. Es gilt:

$$g \sim r^4 \qquad r \gg R_{kr} \tag{2.17}$$

Damit geht der Operator $\hat{S}$ für $r \gg R_{kr}$ in die übliche Transformation über:

$$\hat{S} \sim \frac{1}{r} \qquad r \gg R_{kr} \tag{2.18}$$

Der Hamiltonoperator wird durch die Transformation (2.11) in folgenden Operator transformiert (siehe Anhang A):

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -\frac{\hbar^2}{2} \hat{S}^{-1} g^{11} \hat{S} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \\ & -\frac{\hbar^2}{2} \hat{S}^{-1} g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tilde{g}^{\mu\nu} g^{1/2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \hat{S} \\ & + \hat{S}^{-1} (V + V_{add}) \hat{S} \end{aligned} \tag{2.19}$$

mit: $$\tilde{g}^{\mu\nu} := g^{\mu\nu} - \frac{g^{\mu 1} g^{1\nu}}{g^{11}}$$

$V_{add}$ ist ein Zusatzpotential, welches von der Quantisierung herrührt, und das von den Ableitungen der Massen nach den kollektiven Koordinaten abhängt. Seine genaue Form wird in Anhang A angegeben.

2.3) Spezialfall r-abhängiger Massen

Zum besseren Verständnis der oben angegebenen Transformation wollen wir den Spezialfall untersuchen, daß die Massen nur vom Relativabstand $r$ abhängen.
Im zweiten Teil dieser Arbeit wird angenommen, daß die Massen von $\vec{r}$, also von $r, \vartheta$ und $\varphi$ abhängen. Gleichzeitig wird jedoch gezeigt, daß gilt:

$$g^{r\vartheta} = g^{r\varphi} = 0$$

Wie man sofort sieht, folgt dann aus (2.13)

$$\sigma^{\vartheta} = \sigma^{\varphi} = 0$$

Weiterhin treten in (2.13) und (2.14) die Ableitungen nach $\vartheta$ und $\varphi$ nicht auf. Diese beiden Koordinaten können dann in den Gleichungen (2.13) und (2.14) wie Parameter behandelt werden. Wir werden sie im weiteren ignorieren. Man muß jedoch beachten, daß die Differentialoperatoren in $\vartheta$ und $\varphi$ nicht mit $\hat{S}$ kommutieren, im Gegensatz zu den übrigen Koordinaten (siehe Teil II.3.2).
Wenn die Massen nur von $r$ abhängen, dann kommutiert der Transformationsoperator $\hat{S}$ mit dem kinetischen Energie-Operator, da $\hat{S}$ ein Differentialoperator in allen Koordinaten außer in

r ist.

Als Hamiltonoperator $\hat{H}$ des Systems folgt nach Anhang A:

$$\begin{aligned}\hat{H} = & -\frac{\hbar^2}{2} g^{11} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \\ & -\frac{\hbar^2}{2} g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( g^{\mu\nu} - \frac{g^{\mu 1} g^{1\nu}}{g^{11}} \right) g^{1/2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \\ & + V\left(r, x^\mu + \int_\infty^r \frac{g^{1\mu}}{g^{11}} dr'\right) + V_{add}(r)\end{aligned} \tag{2.20}$$

Der zweite Term von (2.20) stellt den kinetischen Anteil des Hamiltonoperators für die intrinsischen Anregungszustände der Kerne dar. Es wird durch die Kopplung der $x^\mu$ -Bewegung an die r -Bewegung modifiziert.

Die potentielle Energie des Systems wird durch den dritten und vierten Term gegeben. Das ursprüngliche Potential wird durch zwei Effekte abgeändert. Es wird erstens ein Zusatzpotential addiert, welches von der Transformation herrührt und folgende Form besitzt (siehe Anhang A):

$$V_{add}(r) = \frac{\hbar^2}{4} g^{11} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \ln\left(g^{11} g^{1/2}\right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial r} \ln\left(g^{11} g^{1/2}\right) \right)^2 \right] \tag{2.21}$$

Asymptotisch ist $g^{11}$ eine Konstante und die Determinante $g$ proportional zu $r^4$ (siehe 2.17). Somit verschwindet das Zusatzpotential im Asymptotischen:

$$V_{add}(r \gg R_{kr}) = \frac{\hbar^2}{4} g^{11} \left[ -\frac{2}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{4}{r^2} \right] = 0 \tag{2.22}$$

Weiterhin wird das ursprüngliche Potential durch eine Transformation in den Koordinaten $x^\mu$ abgeändert.

Als Beispiel betrachten wir ein Potential, welches in $x^\mu$ Terme bis zur zweiten Ordnung besitzt:

$$V(r, x^\mu) := V^{(0)}(r) + V_\mu^{(1)}(r)\, x^\mu + \frac{1}{2} V_{\mu\nu}^{(2)}(r)\, x^\mu x^\nu \qquad (2.23)$$

Der erste Summand beschreibt das ursprüngliche elastische Streupotential, der zweite die Kopplung zwischen Relativbewegung und innerer Anregung der Kerne und der letzte Term das Potential für diese inneren Anregungen. Durch die Transformation geht dieses Potential in ein neues Potential $\tilde{V}(r, x^\mu)$ über:

$$\begin{aligned}\tilde{V}(r, x^\mu) = \Big[ & V^{(0)}(r) + V_\mu^{(1)}(r) \int_\infty^r \frac{g^{1\mu}}{g^{11}}\, dr' \\ & + \frac{1}{2} V_{\mu\nu}^{(2)}(r) \iint_\infty^r \frac{g^{1\mu}(r')}{g^{11}(r')} \frac{g^{1\nu}(r'')}{g^{11}(r'')}\, dr' dr'' \Big] \qquad (2.24) \\ & + \Big[ V_\mu^{(1)}(r) + V_{\mu\nu}^{(2)}(r) \int_\infty^r \frac{g^{1\nu}}{g^{11}}\, dr' \Big] x^\mu \\ & + \frac{1}{2} V_{\mu\nu}^{(2)}(r)\, x^\mu x^\nu\end{aligned}$$

Sowohl das Streupotential als auch das Kopplungspotential wird durch den Einfluß der ortsabhängigen Massen abgeändert. Als neue Streupotential erhält man:

$$V_{Str}(r) = V_{add}(r) + \tilde{V}(r, x^\mu = 0) \qquad (2.25)$$

Die Rechnungen im zweiten Teil der Arbeit werden zeigen, daß besonders das Potential $V_{add}$ einen dominanten Einfluß auf die Streuung besitzt.

## 3.) Rotationsvariante Struktur der Massen

### 3.1) Invariante Ansätze

Eine allgemeine Forderung an den Hamiltonoperator $\hat{H}$ des Systems besagt, daß er invariant gegenüber einer Rotation im Raum sein muß. Stellt man alle Koordinaten durch sphärische Tensoren dar, so ist diese Forderung gleichbedeutend damit, daß alle Terme des Hamiltonoperators zum Drehimpuls Null gekoppelt sein müssen[12]. Die kinetische Energie besitzt dann folgende Form:

$$T = \frac{1}{2} A_K \circ \left[ \dot{R}_1 \otimes \dot{R}_1 \right]^{[K]} + B_K \circ \left[ \dot{R}_1 \otimes \dot{\alpha}_2 \right]^{[K]} + \frac{1}{2} C_K \circ \left[ \dot{\alpha}_2 \otimes \dot{\alpha}_2 \right]^{[K]} \tag{2.26}$$

Hierbei steht der Tensor zweiter Stufe $\alpha_{2\mu}$ für die intrinsischen Koordinaten der Kerne, der Tensor erster Stufe

$$R_{1\mu} := \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, r\, Y_{1\mu}(\vartheta, \varphi) \tag{2.27}$$

für die Relativkoordinate.

Die Bezeichnungskonventionen sind ref[16] entnommen; $\otimes$ bedeutet eine Kopplung zweier Tensoren zu einem neuen Tensor und

$\circ$ bezeichnet Skalarproduktbildung.

Um die intrinsischen Freiheitsgrade beider Kerne zu beschreiben, müssen wir zwei Tensoren zweiter Stufe $\alpha^{(1)}_{2\mu}$ und $\alpha^{(2)}_{2\mu}$ einführen. (Zur genauen Definition siehe Teil III der Arbeit). Für die Streuung von identischen Teilchen ist es besser, zu symmetrischen und antimetrischen Koordinaten überzugehen:

$$\alpha^{(s)}_{2\mu} := \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \alpha^{(1)}_{2\mu} + \alpha^{(2)}_{2\mu} \right)$$

$$\alpha^{(a)}_{2\mu} := \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \alpha^{(1)}_{2\mu} - \alpha^{(2)}_{2\mu} \right) \qquad (2.28)$$

Aus Symmetriegründen gibt es keine Kopplungsmassen zwischen diesen neuen Freiheitsgraden. Dies soll an folgendem, vereinfachten Beispiel gezeigt werden: sei die kinetische Energie gegeben durch:

$$T = \frac{1}{2} B_{11} \dot{\alpha}^{(1)2} + \frac{1}{2} B_{22} \dot{\alpha}^{(2)2} + B_{12} \dot{\alpha}^{(1)} \dot{\alpha}^{(2)}$$

Für symmetrische Systeme muß $B_{11} = B_{22}$ gelten. Löst man (2.28) nach $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(2)}$ auf und setzt dies oben ein, so erhält man:

$$T = \frac{1}{2} \left( B_{11} + B_{12} \right) \dot{\alpha}^{(s)2} + \frac{1}{2} \left( B_{11} - B_{12} \right) \dot{\alpha}^{(a)2}$$

Es existieren also in symmetrischen Systemen keine Kopplungen zwischen den Freiheitsgraden $\alpha^{(s)}$ und $\alpha^{(a)}$ . Wie man sieht, gehen die symmetrischen Massen $B^{(s)}$ und $B^{(a)}$

$$B^{(s)} = B_{11} + B_{12}$$

$$B^{(a)} = B_{11} - B_{12}$$

asymptotisch ($r \gg R_{kr}$) in die Massen $B_{11}$ über.
Gleichung (2.26) läßt sich in der niedrigsten Ordnung in $\alpha_{2\mu}$ folgendermaßen schreiben:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \Theta \left( \dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta \, \dot{\varphi}^2 \right)$$
$$+ b \dot{r} \, \dot{\alpha}_2^{(s)} \circ Y_2(\vartheta,\varphi) + d \, \dot{\alpha}_2^{(s)} \circ \left( \frac{\partial Y_2}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial Y_2}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \right) \quad (2.29)$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=0,2,4} c_j^{(s)} \left[ \dot{\alpha}_2^{(s)} \otimes \dot{\alpha}_2^{(s)} \right]^{[j]} \circ Y_j$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=0,2,4} c_j^{(a)} \left[ \dot{\alpha}_2^{(a)} \otimes \dot{\alpha}_2^{(a)} \right]^{[j]} \circ Y_j$$

Kopplungen zwischen $\dot{r}$ und $(\dot{\vartheta}, \dot{\varphi})$ sind nicht möglich wegen:

$$\dot{r} \, \dot{Y}_1 \circ Y_1 = \dot{r} \sum_\mu \dot{Y}_{1\mu} Y_{1\mu}^* = \frac{1}{2} \dot{r} \frac{d}{dt} \sum_\mu Y_{1\mu} Y_{1\mu}^* = 0 \quad (2.30)$$

Auch eine Kopplung zwischen den antimetrischen Geschwindigkeiten $\dot{\alpha}_{2\mu}^{(a)}$ und der Relativbewegung ist unmöglich, da der Hamiltonoperator invariant gegenüber einer Vertauschung von Kern 1 mit Kern 2 mit gleichzeitiger Transformation "$\vartheta \to \pi - \vartheta$", "$\varphi \to \pi + \varphi$" sein muß. Aus dem gleichen Grund treten in den beiden letzten Termen in (2.29) nur gerade $j$-Werte auf. Somit ist (2.29) unter der Voraussetzung, in $\alpha_2$ nur die niedrigsten Terme mitzunehmen, der allgemeinste Ansatz. Alle weiteren Terme müßten Kopplungen mit dem Tensor $\alpha_2$ beinhalten, die wir jedoch in dieser Näherung gerade vernachlässigen wollen.

Der durch (2.29) gegebene Massentensor läßt sich ohne weitere Annahmen analytisch invertieren (siehe Anhang B). Um jedoch mit dem Ansatz (2.29) konsistent zu bleiben, müssen wir fordern, daß alle Koeffizienten nur vom Relativabstand $r$ abhängen. Dies bedeutet jedoch keine wesentliche Einschränkung des Modells. Die kinetische Energie (2.29) beschreibt auch unter dieser Einschränkung zum Beispiel die kinetische Energie des

Rot-Vib-Modells[12] oder auch des asymmetrischen Rotators[12], wie man nach Transformation auf das intrinsische System der Kerne erkennen kann.

Für große r ($r \gg R_{kr}$) muß der Massentensor $g_{ik}$ in den üblichen Massentensor für die Bewegung unabhängiger Kerne übergehen.

Daher gilt:

$$\begin{aligned} a\,(r\to\infty) &= m \\ b\,(r\to\infty) &= 0 \\ C_2^{(s,a)}(r\to\infty) &= C_4^{(s,a)}(r\to\infty) = 0 \\ d\,(r\to\infty) &= 0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

3.2) Invariante Struktur der Schrödingergleichung

Die Inverse der Massenmatrix (2.29) und ihre Determinante wird in Anhang B berechnet. Da die Massen nur von $\vec{r}$ abhängen (man beachte die Struktur der $g_{ik}$), kann man die Ergebnisse von Kap. 2.3 benutzen, wenn man berücksichtigt, daß der Drehimpulsoperator nicht mit dem Transformationsoperator $\hat{S}$ kommutiert. Man erhält als Hamiltonoperator:

$$\begin{aligned} \hat{H} = &-\frac{\hbar^2}{2} g^{11} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\hbar^2}{2} \hat{S}^{-1} \hat{L}^2 \hat{S} \cdot E \\ &+ \frac{\hbar}{2i} D \sqrt{6}\, \hat{S}^{-1} \Big\{ \big[ \hat{L}_1 \otimes \pi_2^{(s)*} \big]^{[2]} \circ Y_2 \\ &\qquad + Y_2 \circ \big[ \hat{L}_1 \otimes \pi_2^{(s)*} \big]^{[2]} \Big\} \hat{S} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_j \tilde{C}_j^{(s)} \big[ \pi_2^{(s)*} \otimes \pi_2^{(s)*} \big]^{[j]} \circ Y_j \end{aligned} \tag{2.32}$$

Alle auftretenden Terme sind hermitesch. Die Koeffizienten sind in Anhang B angegeben.

3.3) Lösung der Schrödingergleichung

Die Schrödingergleichung:

$$(\hat{H} - E_{tot})\,\Psi(\vec{r}, \alpha_{2\mu}) = 0 \qquad (2.35)$$

läßt sich gemäß ref[7] folgendermaßen in ein System von gekoppelten Differentialgleichungen umwandeln:

Die Wellenfunktion $\Psi$ wird nach den asymptotischen intrinsischen Wellenfunktionen entwickelt:

$$\Psi(r, \Omega, \alpha_{2\mu}) = \sum_{I,\ell,\lambda} R^{I}_{\ell\lambda}(r) \left[ i^{\ell} Y_{\ell} \otimes \varphi_{\lambda}(\alpha_{2\mu}) \right]^{[I]} \qquad (2.36)$$

Dabei sind $\varphi_\lambda$ die intrinsischen Wellenfunktionen der beiden Kerne. Multipliziert man Gleichung (2.35) mit $\left[ i^{\ell} Y_{\ell} \otimes \varphi_{\lambda} \right]^{[I]}$ und integriert über alle intrinsischen Koordinaten und über den Relativwinkel $\Omega$ (es wird dabei über das asymptotische Volumenelement integriert), so erhält man ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem für die Relativwellenfunktionen $R^{I}_{\ell\lambda}(r)$ :

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2} g^{11} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\hbar^2}{2} E\, \ell(\ell+1) + V_{add}(r) \right.$$

$$- E_{tot} \} \; R^{I}_{e\lambda}(r) =$$

$$-\sum_{e',\lambda'} \Big\langle \Big[ i^{e} Y_{e} \otimes \varphi_{\lambda} \Big]^{[I]} \Big| \Big\{ \frac{\hbar}{2i} \tilde{\tilde{D}} \Big( \Big[ \hat{L}_{1} \otimes \pi_{2}^{(s)*} \Big]^{[2]} \circ Y_{2} + Y_{2} \circ \Big[ \hat{L}_{1} \otimes \pi_{2}^{(s)*} \Big]^{[2]} \Big) \qquad (2.37)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{J} \tilde{\tilde{C}}_{J}^{(s)} \Big[ \pi_{2}^{(s)*} \otimes \pi_{2}^{(s)*} \Big]^{[J]} \circ Y_{J}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{J} C_{J}^{(a)} \Big[ \pi_{2}^{(a)*} \otimes \pi_{2}^{(a)*} \Big]^{[J]} \circ Y_{J}$$

$$+ V\Big(\vec{r}, \alpha_{2\mu} - \sqrt{\tfrac{4\pi}{3}}\, \beta(r)\, Y_{2\mu}\Big) \Big\} \Big| \Big[ i^{e'} Y_{e'} \otimes \varphi_{\lambda'} \Big]^{[I]} \Big\rangle \; R^{I}_{e'\lambda'}(r)$$

Diese Differentialgleichung kann wie in ref[7] gelöst und die S-Matrix berechnet werden.

## III.) Berechnung der Massen im Zwei-Zentren-Modell

### 1.) Massen im Cranking-Modell

Üblicherweise werden die kollektiven Massen im Cranking-Modell berechnet[8]:

$$B_{xy} = -2\hbar^2 \sum_{n\neq 0} \frac{\langle 0|\frac{\partial}{\partial x}|n\rangle\langle n|\frac{\partial}{\partial y}|0\rangle}{\varepsilon^n - \varepsilon^0} \qquad (3.1)$$

Diese Beziehung kann mit dem Vielteilchenhamiltonoperator H, der von den kollektiven Koordinaten abhängt, folgendermaßen umgeformt werden:

$$B_{xy} = 2\hbar^2 \sum_{n\neq 0} \frac{\langle 0|\frac{\partial H}{\partial x}|n\rangle\langle n|\frac{\partial H}{\partial y}|0\rangle}{(\varepsilon^n - \varepsilon^0)^3} \qquad (3.2)$$

Summiert wird über alle Vielteilchenzustände mit Ausnahme des Grundzustandes. Die Vielteilchenanregungszustände lassen sich durch Teilchen-Loch-Anregungen beschreiben.

Wenn F für die Fermikante steht, so folgt:

$$B_{xy} = 2\hbar^2 \sum_{\substack{i\leq F \\ j>F}} \frac{\langle i|\frac{\partial H}{\partial x}|j\rangle\langle j|\frac{\partial H}{\partial y}|i\rangle}{(\varepsilon^j - \varepsilon^i)^3} \qquad (3.3)$$

Entartet ein unbesetztes Niveau mit einem besetzten ( $\varepsilon^j = \varepsilon^i$ ), so divergieren die Massen $B_{xy}$ nach Gleichung (3.3). Bei Massenberechnungen in schweren Kernen werden diese Entartungen durch Restwechselwirkungen (Paarkraft) aufgehoben (siehe Fig. 1).
Da in schweren Kernen viele solcher "Levelcrossings" auftreten, bestimmen diese Punkte im wesentlichen die kollektiven Massen[17].

In leichten Kernen (wie $^{24}$Mg) besitzt die Paarkraft keinen Einfluß[18]. Die Gap-Gleichungen liefern nur die triviale Lösung. In diesem Massenbereich spielen andere Restwechselwirkungen eine dominante Rolle, die vor allem Quartettkonfigurationen bevorzugen[18].

Das Studium der Levelschemas leichter Kerne (siehe Fig. 2) zeigt, daß es bei diesen Kernen nur zu wenigen Levelcrossings kommt. Im Gegensatz zu schweren Kernen können daher dort die Hauptbeiträge zu den kollektiven Massen nicht von den Levelcrossings herrühren.

In der Beschreibung physikalischer Prozesse, wie der Streuprozesse, treten nicht die in (3.1) berechneten Massen, sondern die Elemente der inversen Matrix auf (siehe II.2). In Anhang C wird gezeigt, daß diese Inverse Matrix an Levelcrossing-Punkten nicht gegen Null geht, obwohl die Massenmatrix (3.1) an diesen Punkten divergiert. Dieses Verhalten wird durch die Kopplungsmassen zwischen den verschiedenen Freiheitsgraden erzwungen. Nur wenn die Kopplung zwischen den Freiheitsgraden vor der Inversion vernachlässigt wird, spiegelt die Inverse das singuläre Verhalten der ursprünglichen Massen wider. Will man die Bewegungsgleichung in nur einer Variablen aufstellen, so muß man deshalb stets die gesamte Matrix (3.1) invertieren und darf erst dann die Kopplung an die anderen Freiheitsgrade vernachlässigen.

In der Cranking-Formel (3.3) sind stets die tiefsten Zustände besetzt. Wenn das System über einen Crossing-Punkt läuft, muß das Nukleon von einem Niveau auf das andere umbesetzt werden.

Wird der Punkt mit endlicher Geschwindigkeit überfahren, so besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Nukleon in seinem ursprünglichen Niveau bleibt und daß damit nicht mehr die tiefsten Niveaus besetzt sind (Zener-Effekt)[17, 19]. Dieser Effekt ist insbesondere bei Koordinaten wichtig, die den Austausch von Nukleonen zwischen den Kernen beschreiben[9].

## 2.) Massen im Zwei-Zentren-Modell

### 2.1) Definition der Koordinaten

Man beschreibt den Streuvorgang im wesentlichen durch folgende Koordinaten:

a) dem Relativvektor $\vec{r}$ zwischen den Kernen

b) kollektive Oberflächenkoordinaten der individuellen Kerne.

Wir beschränken uns im weiteren auf symmetrische Systeme. Außerdem lassen wir keine Teilchenanregungen oder Anregungen höherer Stufe als Quadrupoldeformationen zu. Auch vernachlässigen wir Koordinaten, die den Austausch von Nukleonen zwischen den Kernen beschreiben[9].

Die Koordinaten können nur solange eindeutig definiert werden, solange die Kerne nicht miteinander überlappen. Im Prinzip kann man die Koordinaten im Überlappgebiet beliebig definieren; sie müssen nur im Asymptotischen in die üblichen Koordinaten übergehen. Verschiedene Definitionen im Überlappgebiet entsprechen jedoch verschiedenen möglichen Anregungen des Kern-Kern-Systems. Es ist daher möglich, durch eine ungünstige Definition nur solche Anregungen zu beschreiben, die energetisch so hoch liegen, daß sie während des Stoßes nicht angeregt werden (siehe zu diesem Thema auch ref[11,27]).

Wir wollen folgende physikalisch plausible Definition wählen (siehe Fig. 3):

a) Als Abstand der beiden Kerne voneinander führen wir den Abstand der zwei Zentren im Zwei-Zentren-Schalenmodell[20,21] ein.

b) Wir teilen das Kern-Kern-System durch eine Ebene senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Zentren in zwei Bereiche, 1 und 2. Die Ebene geht aus Symmetriegründen durch den Mittelpunkt der Verbindungslinie. In jedem der beiden Bereiche wird die Oberfläche des Systems auf übliche Art durch die Deformationen $\alpha_{2\mu}^{(1)}$ bzw. $\alpha_{2\mu}^{(2)}$ beschrieben, d.h., man entwickelt den Oberflächenvektor $\vec{R}$ um das entsprechende Zentrum nach Kugelfunktionen:

$$R(\vartheta_1, \varphi_1) = R_0 \left(1 + \alpha_{2m}^{(1)} Y_{2m}^{*}(\vartheta_1, \varphi_1)\right)$$

für den Bereich 1, gemessen um Zentrum 1 und

$$R(\vartheta_2, \varphi_2) = R_0 \left(1 + \alpha_{2m}^{(2)} Y_{2m}^{*}(\vartheta_2, \varphi_2)\right)$$

für den Bereich 2, gemessen um Zentrum 2.
Im Asymptotischen gehen diese Koordinaten in die Oberflächenkoordinaten der individuellen Kerne über. Für symmetrische Systeme ist es sinnvoll, symmetrische und antimetrische Koordinaten zu verwenden:

$$\alpha_{2\mu}^{(s)} := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha_{2\mu}^{(1)} + \alpha_{2\mu}^{(2)}\right)$$
$$\alpha_{2\mu}^{(a)} := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha_{2\mu}^{(1)} - \alpha_{2\mu}^{(2)}\right) \qquad (3.4)$$

Für $r = o$ beschreiben diese Koordinaten den Compoundkern. Die Koordinate $\alpha^{(s)}_{2\mu}$ ist der Quadrupolkoordinate $\alpha^{(c)}_{2\mu}$ des Compoundkerns proportional:

$$\alpha^{(c)}_{2\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\alpha^{(s)}_{2\mu} \qquad r = \sigma \qquad (3.5)$$

Die Koordinate $\alpha^{(a)}_{2\mu}$ beschreibt im wesentlichen Oktopoldeformationen (siehe Fig. 4).
Für kleine Abstände der beiden Kerne voneinander erzeugen in erster Näherung sowohl die Koordinate $\vec{r}$ als auch die Koordinaten $\alpha^{(s)}_{2\mu}$ gleiche Compoundkernkonfigurationen. Beide führen zu Quadrupoldeformationen des Compoundkernsystems. In den Bewegungsgleichungen äußert sich diese Tatsache darin, daß diese Freiheitsgrade stark miteinander verkoppelt sind.

Alle Koordinaten wurden im Laborsystem definiert, da sich durch den Übergang auf ein inneres System keine Vereinfachung des Hamiltonoperators (2.29) erreichen läßt. Transformiert man zum Beispiel auf ein Koordinatensystem, dessen z-Achse mit dem Ortsvektor zwischen den beiden Kern-Zentren zusammenfällt, so vereinfacht sich die Struktur des Hamiltonoperators nicht, da die Hauptachsensysteme der individuellen Kerne im allgemeinen nicht mit diesem System übereinstimmen.
In dieser Arbeit wurden die Koordinaten im Laborsystem definiert und quantitsiert. Die Transformation auf irgendein körperfestes System ist leicht möglich.

## 2.2) Berechnung der Massen

Zur Berechnung der Massen im Cranking-Modell benötigen wir einen Vielteilchen-Hamiltonoperator, der von den kollektiven Variablen als Parameter abhängt. Als einen zur Beschreibung der Streuung geeigneten Hamiltonoperator stellt sich der Zwei-Zentren-Hamiltonoperator dar[20]. Das allgemeinste Modell dieser Art, das asymmetrische Zwei-Zentren-Schalenmodell[21] ist zur Beschreibung von Kern-Kern-Stößen ungeeignet, da es nur Konfigurationen zuläßt, die rotationssymmetrisch um die Verbindungslinie der Kerne sind. Da die Kerne mit beliebigen Orientierungen aufeinandergeschossen werden und keine Zeit haben, sich während des Anflugs in die energetisch günstigste Position zu drehen[22], benötigen wir ein Modell, welches beliebige Orientierungen der Kerne zueinander zuläßt. (Dies steht im Gegensatz zur Kernspaltung, in der man annehmen kann, daß das System rotationssymmetrisch um die Verbindungslinie der Fragmente bleibt[23].)
Wir definieren folgenden Zwei-Zentren-Hamiltonoperator:

$$\tilde{H}(\vec{r}_i, \vec{r}, \alpha) := \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \left(\vec{r}_i - \frac{1}{2}\varepsilon(j)\vec{r}\right)^2 \cdot \left(1 - 2 \sum_{K=1}^{2} \alpha_{2\mu}^{(K)} f(K) Y_{2\mu}^{*}(\vartheta, \varphi)\right) \tag{3.6}$$

Die Koordinaten sind oben definiert worden; für die Funktionen $\varepsilon$ und $f$ soll folgendes gelten:

$$\text{Bereich 1}: \quad \varepsilon = 1 \; ; \; f(z) = \textcircled{H}(z)$$
$$\text{Bereich 2}: \quad \varepsilon = -1 \; ; \; f(z) = \textcircled{H}(-z) \tag{3.7}$$

Die Äquipotentialflächen des Potentials des Hamiltonoperators (3.6) haben in niedrigster Ordnung in $\alpha$ den in Fig. 3 gezeigten Verlauf.

Für eine Äquipotentialfläche gilt nämlich:

$$V(\vec{R}_i, \vec{r}, \alpha) = Const \tag{3.8}$$

oder in niedrigster Ordnung in $\alpha$ :

$$\begin{aligned} C_{onst} &= (\vec{R}_i - \varepsilon(j)\tfrac{\vec{r}}{2})^2 \Big(1 - 2\sum_{k=1}^{2} f(k) * \\ &* \alpha_{2\mu}^{(k)} Y_{2\mu}^{*}\Big) \simeq \frac{(\vec{R}_i - \varepsilon(j)\frac{\vec{r}}{2})^2}{(1 + \sum_k f(k)\alpha_{2\mu}^{(k)} Y_{2\mu}^{*})^2} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Dies entspricht gerade einer um $\frac{1}{2}\vec{r}\ \varepsilon(j)$ mit einer Quadrupoldeformation $\alpha_{2\mu}$ deformierten Fläche.

Addieren wir zu (3.6) das übliche $\vec{L}\cdot\vec{S}$ Potential[21], so erhalten wir den endgültigen Einteilchenhamiltonoperator:

$$H = \tilde{H} - \frac{2\hbar\kappa}{m\omega_0}(\vec{\nabla}_i V \times \vec{p}_i)\vec{S} \tag{3.10}$$

Die Konstanten $\kappa$ und $\omega_0$ sind in der Literatur gegeben[24]; V bedeutet das Potential aus (3.6).

Die Massen wurden nach der Cranking-Formel (3.3) mit dem Hamiltonoperator (3.10) unter Einschluß des $\vec{L}\cdot\vec{S}$ Potentials in Anhang D berechnet. Sie zeigen die in (2.29) zugrunde gelegte Struktur. Die Massen $\textcircled{H}$ und $\mathcal{A}$ wurden nicht berechnet sondern aus folgenden Überlegungen bestimmt:

$$a\dot{r}^2 + \textcircled{H}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2) = a(-)^{\mu}\dot{R}_{1\mu}\dot{R}_{1-\mu} \tag{3.11}$$

mit:

$$R_{1\mu} := \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, r\, Y_{1\mu}$$

Daraus folgt:

$$\textcircled{H}(r) = a(r) \cdot r^2$$

Entsprechend folgt aus der Beziehung:

$$\gamma \cdot \left[ \dot{R}_1 \otimes Y_1 \right]^{[2]} \circ \dot{\alpha}_2^{(s)} = b\, \dot{r}\, Y_2 \circ \dot{\alpha}_2^{(s)} + d\, \dot{Y}_2 \circ \dot{\alpha}_2^{(s)} \tag{3.12}$$

$$d(r) = \frac{1}{2} b(r) \cdot r$$

Bei der Berechnung der Massen muß folgendes beachtet werden: Eine Änderung in den Koordinaten $\vec{r}$, $\alpha_{2\mu}^{(s)}$ und $\alpha_{2\mu}^{(a)}$ führt im Allgemeinen zu einer Änderung des Gesamtvolumens des Kern-Kern-Systems und zu einer Verschiebung des Gesamtschwerpunktes. Diese Bewegungen ergeben Beiträge zu den Massen, welche eliminiert werden müssen. Es bieten sich hierzu zwei Möglichkeiten an:

Man führt weitere Oberflächenkoordinaten $\alpha_0$ und $\alpha_{1\mu}$ ein[12]. Aus der Bedingung, daß sich während des Stoßes weder das Volumen noch der Schwerpunkt des Kern-Kern-Systems ändern sollen, werden diese neuen Variablen als Funktionen der Koordinaten $\vec{r}$, $\alpha_{2\mu}^{(s)}$ und $\alpha_{2\mu}^{(a)}$ bestimmt. In diesen neuen Koordinaten $\alpha_0$ und $\alpha_{1\mu}$ können nun entsprechend wie zu den anderen Koordinaten Massen berechnet werden. Über die funktionale Abhängigkeit der Koordinaten $\alpha_0$ und $\alpha_{1\mu}$ von $\vec{r}$, $\alpha_{2\mu}^{(s)}$ und $\alpha_{2\mu}^{(a)}$ werden Korrekturmassen berechnet. Das Verfahren wird unten skizziert. Asymptotisch hängen die Größen $\alpha_0$ und $\alpha_{1\mu}$ quadratisch von $\alpha_{2\mu}^{(s)}$ und $\alpha_{2\mu}^{(a)}$ ab[12]. Die Korrekturmassen verschwinden daher in der von uns

gewählten Näherung asymptotisch. Wenn die Kerne überlappen, besteht ein linearer Zusammenhang zwischen $\alpha_0$ und $\alpha^{(s)}_{\lambda\mu}$ bzw. $\alpha_{1\mu}$ und $\alpha^{(a)}_{\lambda\mu}$. Es treten dann Korrekturmassen auf.

Die Schwerpunktsbewegung läßt sich auch auf eine zweite Art eliminieren. Zur Vereinfachung der Schreibweise gehen wir wieder auf die Koordinaten $x_i$ über. Wir führen einen weiteren Vektor $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ ein. Die kinetische Energie lautet dann:

$$T = \frac{1}{2} B_{i\kappa} \dot{x}_i \dot{x}_\kappa + B_{i\ell_z} \dot{x}_i \dot{z}_\ell + \frac{1}{2} B_{\ell_z m_z} \dot{z}_\ell \dot{z}_m$$

Von den Koordinaten $(x_i, \vec{z})$ transformieren wir nun auf neue Koordinaten $(y_i, \vec{R}_{CM})$, in denen der Schwerpunkt $\vec{R}_{CM}$ eine unabhängige Variable darstellt. Die kinetische Energie schreibt sich dann mit den korrigierten Massen $\tilde{B}_{ik}$ und der Gesamtmasse $M$ des Systems:

$$T = \frac{1}{2} \tilde{B}_{i\kappa} \dot{Y}_i \dot{Y}_\kappa + \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 \qquad (3.13)$$

Wählt man die Transformation folgendermaßen:

$$\begin{aligned} Y_i &:= x_i \\ \vec{R} &= \vec{R}(x_i, \vec{z}) \end{aligned} \qquad (3.14)$$

so erhält man:

$$T = \frac{1}{2} \tilde{B}_{i\kappa} \dot{x}_i \dot{x}_\kappa + \frac{1}{2} M \left( \frac{\partial \vec{R}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \vec{R}}{\partial z_\ell} \dot{z}_\ell \right)^2 \qquad (3.15)$$

Die korrigierten Massen ergeben sich aus dem Koeffizientenvergleich:

$$\tilde{B}_{ik} = B_{ik} - M \frac{\partial \vec{R}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{R}}{\partial x_k} \qquad (3.16)$$

Aus den gleichen Gründen wie oben, verschwinden die Korrekturterme im Asymptotischen.
In den Rechnungen in dieser Arbeit wurden Korrekturen dieser Art noch nicht berücksichtigt.

Wir wollen nun untersuchen, welche weiteren Annahmen in die Rechnungen eingehen.
Die Ortsabhängigkeit der Frequenz $\omega$ des Doppeloszillators hängt von der Geschwindigkeit des Streuprozesses ab. Es lassen sich zwei Grenzfälle unterscheiden[25,26]:
In der sudden Approximation nimmt man an, daß der Stoß so schnell erfolgt, daß die Nukleonen keine Zeit haben, auf energetisch günstigere Niveaus überzuwechseln. In dieser Näherung ist $\omega$ konstant und gleich dem asymptotischen Wert. Es treten Kompressionen in der Nukleonendichteverteilung auf, die sich im Streupotential als "soft core" bemerkbar machen.
In der adiabatischen Approximation nimmt man an, daß die Nukleonen stets die energetisch günstigsten Niveaus besetzen. In dieser Näherung dürfen keine Kompressionen auftreten, d.h. das Volumen des Gesamtsystems bleibt während des Stoßes konstant. Mit dieser Bedingung läßt sich die Funktion $\omega(r)$ aus dem asymptotischen Wert angeben[21].
Die Potentiale, die man in diesen beiden Approximationen berechnet, unterscheiden sich wesentlich voneinander. Die Potentiale in der sudden Approximation zeigen für kleine Abstände

der Kerne voneinander einen repulsiven "soft core", während die Potentiale in der adiabatischen Näherung auf den Grundzustand des Compoundsystems führen. (Dieses Potential muß allerdings auf die Nullpunktsbewegungen in der Ortskoordinate und in den Oberflächenkoordinaten im Sinn von ref[28] renormiert werden.) Die Berechnung der Streupotentiale ist in der Literatur ausführlich diskutiert worden[1,2,7,29], wir wollen daher nicht weiter auf diese Frage eingehen.
Der Einfluß der verschiedenen Näherungen auf die kollektiven Massen wird bei den Rechnungen in Kapitel III.4 untersucht. Es wird sich zeigen, daß die Massen kaum von der gewählten Näherung abhängen. Dies resultiert daher, daß beim Übergang von der einen zur anderen Näherung bei leichten Kernen im wesentlichen die absolute Lage der Niveaus, die relative Lage der Levels aber nur kaum geändert werden. Die Potentiale hängen nun aber von der absoluten Lage der Niveaus ab (im Renormalisierungsprozess nach Stutinsky[30] widergegeben durch den Liquiddrop), während die kollektiven Massen im Cranking-Modell nur von der relativen Lage der Niveaus zueinander abhängen. Man kann aus diesen Überlegungen schließen, daß für leichte Kerne die kollektiven Massen praktisch von der jeweiligen Näherung unabhängig sind.

## 3.) Kollektive Massen für Transfer-Prozesse

### 3.1) Kollektive Asymmetrievariable

Bevor wir die berechneten Massen diskutieren, wollen wir auf einen weiteren Freiheitsgrad eingehen, der in der Schwerionenstreuung von großer Bedeutung ist. In Ref[9] wurde gezeigt, wie der Teilchentransfer während eines Stoßes kollektiv beschrieben werden kann. Die wichtigsten Punkte sollen hier widergegeben werden.

Wir definieren die kollektive Asymmetrievariable folgendermaßen: Das Kern-Kern-System wird wie in Fig. 3 in zwei Bereiche geteilt. Wir lassen nun jedoch unterschiedlich große Fragmente zu. Die Asymmetrievariable $\eta$ definieren wir durch die Beziehung:

$$\eta := \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \tag{3.17}$$

mit $A_i = \int_{\text{Bereich } i} \varrho(\vec{x})\, d^3x$

und der Dichte:

$$\varrho(\vec{x}) = \int d\tau_N \, \Psi^*(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N) \sum_{i=1}^{N} \delta(\vec{x} - \vec{r}_i)\, \Psi(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N)$$

Hier ist $\Psi$ die Vielteilchenwellenfunktion und $A_i$ die Zahl der Nukleonen im Bereich i. Im Überlappgebiet gehören die Nukleonen zu beiden Fragmenten; die Größen $A_i$ sind daher beliebige rationale Zahlen (zwischen 0 und N ).

Im Asymptotischen gehören zu physikalisch "sinnvollen" Wellenfunktionen die Nukleonen stets entweder zum einen oder zum anderen Fragment: Die Nukleonenanzahl $A_i$ ist daher asymptotisch für solche Wellenfunktionen ganzzahlig. Da wir die Asymmetrievariable als einen dynamischen Freiheitsgrad behandeln wollen, müssen wir auch im Asymptotischen nicht-ganzzahlige Fragmentationen zulassen. Aus physikalischen Gründen muß dann der Hamiltonoperator in dieser Variablen so beschaffen sein, daß die nicht-ganzzahligen Fragmentationen nicht als Lösung der entsprechenden Schrödingergleichung auftreten können. Wir verbieten die nicht-ganzzahligen Fragmentationen also nicht a priori, sondern sorgen durch die spezielle Struktur der Schrödingergleichung dafür, daß sie nicht vorkommen.

Bevor wir diesen Punkt weiter diskutieren, wollen wir die Koordinate $\eta$ mit der in ref[9] definierten Asymmetriekoordinate $\}$ vergleichen. $\}$ ist eine Volumen-Asymmetriekoordinate:

$$\} := \frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2} \tag{3.18}$$

$V_1$ und $V_2$ messen die Volumina der entsprechenden Bereiche.

Für kleine Abstände folgt die Vielteilchenwellenfunktion jeder Änderung des Potentials. Daher gilt, solange die Kerne überlappen:

$$\eta \approx \} \qquad r < R_{kr} \tag{3.19}$$

Im Asymptotischen dagegen unterscheiden sich die beiden Variablen stark voneinander. In der Theorie der Kernspaltung ist man nur an der Dynamik bis zum Zerreißpunkt interessiert. Man verwendet daher die leichter zu handhabende Koordinate $\zeta$. In einer Theorie für Kernreaktionen benötigt man besonders das asymptotische Verhalten der Wellenfunktionen. Da nur die Variable $\eta$ asymptotisch die Massenfragmentation richtig beschreibt, muß man in der Streutheorie den Hamiltonoperator in dieser Variablen formulieren. In praktischen Rechnungen ist es jedoch notwendig, zuerst alle Größen wie Massen und Potentiale in der Variablen $\zeta$ zu berechnen und sie dann auf die Variable $\eta$ zu transformieren.

Bezeichnen wir die $\zeta$-Masse mit $B_{\zeta\zeta}$ und die $\eta$-Masse mit $B_{\eta\eta}$, so gilt:

$$T = \frac{1}{2} B_{\zeta\zeta} \dot{\zeta}^2 = \frac{1}{2} B_{\eta\eta} \dot{\eta}^2$$

$$B_{\eta\eta} = B_{\zeta\zeta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)^2 \qquad (3.20)$$

Aus Gleichung (3.19) erhält man sofort für die Masse $B_{\eta\eta}$, solange die Kerne überlappen:

$$B_{\eta\eta} \approx B_{\zeta\zeta} \qquad (3.21)$$

Im Asymptotischen hängt die Masse $B_{\eta\eta}$ wesentlich von der Relation zwischen $\zeta$ und $\eta$ ab.

Wir wollen eine Beziehung zwischen diesen Variablen ableiten und zeigen, daß sie zu physikalisch sinnvollen Ergebnissen führt.

3.2) Einfluß der Auffüllvorschrift.

Als Vielteilchenhamiltonoperator legen wir den Asymmetrischen-Zwei-Zentren-Schalenmodellhamiltonoperator[21] zugrunde. Er hängt von der Volumen-Asymmetrievariablen $\xi$ ab. Mit diesem Hamiltonoperator können die Massen $B_{\xi\xi}$ im Cranking-Formalismus berechnet werden. Die Grundzustandswellenfunktion wird dabei, wie üblich, dadurch gegeben, daß man die tiefsten Zustände bis zur Fermikante auffüllt. Diese Auffüllvorschrift liefert zusammen mit Gleichung (3.17) die gesuchte Relation zwischen $\xi$ und $\eta$. Sie ist besonders im asymptotischen Bereich $r \gg R_{kr}$ interessant.

Für $r > R_{kr}$ sind die Nukleonenwellenfunktionen vorwiegend in einem der Potentialtöpfe lokalisiert. Eine Änderung in $\xi$ ändert dann gemäß der Auffüllvorschrift und Gleichung (3.17) solange nicht die Variable $\eta$, bis ein unbesetztes Niveau die Fermikante schneidet. Dann wird ein Nukleon auf das nun tiefere Niveau umbesetzt (siehe Fig. 5). Dies führt zu der in Fig. 6 gezeigten Beziehung zwischen $\eta$ und $\xi$.

Die Ableitung $\frac{\partial \xi}{\partial \eta}$ ist auf Grund dieser Überlegungen um solche Werte $\eta_i$ gepikt, die ganzzahligen Massenfragmentationen entsprechen (siehe Fig. 6). Gemäß Gleichung (3.20) zeigen auch die Massen $B_{\eta\eta}$ im Asymptotischen dieses Verhalten.

Wie in ref[9] gezeigt wurde, sind die Lösungen $\varphi(\eta)$ zu einem

solchen singulären Hamiltonoperator Wellenfunktionen mit einer $\delta$-funktionsartigen Struktur an ganzzahligen Fragmentationen $\eta_i$. Die singulären Massen führen also gerade dazu, daß man das System mit einer endlichen Wahrscheinlichkeit nur in ganzzahligen Fragmentationen findet.(Diese Forderung haben wir am Anfang dieses Kapitels an den Hamiltonoperator gestellt.)

Wie man aus Fig. 6 entnehmen kann, entstehen die Singularitäten in den Massen $B_{\eta\eta}$ dadurch, daß während einer Änderung von $\}$ kein Nukleon ausgetauscht wird. Dynamische Effekte bei der Berechnung der Massen können daher nicht die Ergebnisse an diesen singulären Stellen sondern höchstens zwischen ihnen (also dort, wo der Nukleon-Transfer stattfindet) ändern. Im Asymptotischen wird jedoch die Physik, wie oben erwähnt, nur von den singulären Stellen bestimmt. Dynamische Effekte können also keinen großen Einfluß auf die $\eta$-Masse haben.

Weiterführende Rechnungen werden von Dr. S. Liran und Dr. O. Zohni[34] durchgeführt. In dieser Arbeit wollen wir im Folgenden die Massenasymmetrie nicht weiter behandeln.

## 4.) Rechnungen für $^{12}C$-$^{12}C$ und $^{16}O$-$^{16}O$

Erste Rechnungen für das System $^{12}C$-$^{12}C$ wurden mit den in ref[21] angegebenen Werten für $\omega$ und $\kappa$ durchgeführt. Bessere Werte für leichte Kerne sind in ref[24] gegeben. Der prinzipielle Verlauf der Massenparameter hängt nicht von der genauen Wahl der

Größen $\omega$ und $k$ ab; für quantitative Berechnungen der Streuquerschnitte dagegen müssen diese Werte angefittet werden.

Der prinzipielle Verlauf der Massen wird für das System $^{12}C$-$^{12}C$ in Fig. 7 gezeigt. Die Massen zeigen in der Gegend von 5 - 6 fm Abstand einen charakteristischen Abfall. Wir finden diesen Abfall sowohl in der sudden, wie auch in der adiabatischen Näherung sowie in einem anderen System, nämlich $^{16}O$-$^{16}O$ wieder (Fig. 8). Ein Vergleich mit Fig. 2 zeigt, daß bei diesem Abstand sich die Struktur der asymptotischen Einteilchenniveaus aufzulösen beginnt. Es ist zu vermuten, daß die starke Variation der Massen in diesem Bereich von der Umorientierung der Einteilchenniveaus von den asymptotischen Levels zu den Levels des Compoundkerns herrührt. In Fig. 9 sind die Hauptbeiträge zu der Masse $f_o^{(s)}$ in diesem Bereich aufgezeigt. Da die Einteilchenniveaus ihre Abstände zueinander in diesem Bereich kaum ändern, folgt aus diesem Bild, daß der Abfall der Massen vorwiegend auf eine starke Änderung der entsprechenden Matrixelemente zurückzuführen ist. Für die r-Massen kann dieser Abfall teilweise durch einen geometrischen Effekt erklärt werden. Er spiegelt dann die Tatsache wider, daß die Mittelpunkte der Fragmente im Überlappgebiet nicht mit ihren Schwerpunkten übereinstimmen[25] (siehe Fig. 10).

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Massen liegt darin, daß sie von der gewählten Näherung praktisch unabhängig sind (Fig.8). Dieser Punkt wurde schon oben diskutiert. Die Masse für die r-Bewegung zeigt auch im System $^{16}O$-$^{16}O$ die gleiche Struktur wie im $^{12}C$-$^{12}C$ System.

Es ist daher zu vermuten, daß die Effekte, die im $^{12}C$-$^{12}C$ System diskutiert werden, auch im $^{16}O$-$^{16}O$ System auftreten. Diese Frage bedarf jedoch weiterer Rechnungen, da manche Effekte, wie zum Beispiel die unten diskutierte Barriere, gerade durch die Ankopplung anderer Freiheitsgrade an die Relativbewegung entstehen.

Wir wollen nun untersuchen, wie die Massen das Streupotential beeinflussen. Hierzu berechnen wir das Streupotential unter Berücksichtigung von allen Freiheitsgraden und vernachlässigen dann die Kopplung der Relativbewegung mit den anderen Freiheitsgraden. Die Schrödingergleichung (zur Vereinfachung ohne Drehimpuls)

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2} g^{11} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + V(\vec{r}) - E_{tot} \right) \Psi(r) = 0 \qquad (3.22)$$

kann mit der reduzierten Massen m folgendermaßen geschrieben werden[5]:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{m g^{11}} \left[ V + (m g^{11} - 1) E_{tot} \right] - E_{tot} \right\} \Psi(r) = 0 \qquad (3.23)$$

Man kann das System also anstatt mit einer ortsabhängigen Masse mit der reduzierten Masse und einem effektiven, energieabhängigen Potential beschreiben:

$$V_{eff}(r) = \frac{1}{m g^{11}} V(r) + \frac{m g^{11} - 1}{m g^{11}} E_{tot} \qquad (3.24)$$

mit:

$$V(r) = V_{opt}(r) + V_{add}(r)$$

Die drei Komponenten werden für $^{12}C$-$^{12}C$ in Fig. 11 gezeigt. Als optisches Potential wurde das von Morović berechnete verwendet[29].

Der energieabhängige Anteil des effektiven Potentials ist an den Stellen bindend, an denen $\frac{1}{g^{rr}}$ größer als m ist. Es wird dort mit wachsender Energie tiefer. Nach Fig. 11 sind sowohl das energieabhängige Potential als auch das Zusatzpotential $V_{add}$ im Bereich von etwa 6 fm Abstand bindend. Dieser Teil der Zusatzpotentiale unterstützt also die Bildung von Kernmolekülen [6,7]. Dann trennt eine Barriere von etwa 30 MeV Höhe die Molekülzustände von den Compoundkernzuständen. Diese Barriere resultiert aus dem Abfall der Massen in diesem Bereich. Sie beschreibt die Tatsache, daß sich im Schalenmodell die Nukleonenbahnen von Bahnen um die individuellen Zentren zu Bahnen um beide Zentren ändern müssen, wenn sich die Ionen weiter nähern wollen. Durch diese Barriere im effektiven Potential (siehe Fig. 12) werden die Molekülzustände gegen den Zerfall in den Compoundkern geschützt. Andererseits macht dieses Bild Fusion über Molekülkanäle wenig wahrscheinlich. Diese Überlegungen gelten jedoch nur für solche Compoundkernzustände, die durch zwei $^{12}C$-Kerne beschrieben werden können. Über den Zerfall des Kernmoleküls in andere Compoundkernzustände lassen sich keine Aussagen machen.

Aus Fig. 13 läßt sich erkennen, daß die Barriere im Wesentlichen von der Ortsabhängigkeit der Determinante g des Massentensors abhängt.

Nach (2.21) gilt nämlich für $V_{add}$:

$$V_{add} = \frac{\hbar^2}{2} g^{11} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \ln \gamma + \left( \frac{\partial}{\partial r} \ln \gamma \right)^2 \right] \tag{3.25}$$

$$\gamma(r) := \left( g^{11} \right)^{1/2} g^{1/4}$$

In Fig. 13 sind die Funktionen $\gamma(r)/r$ und $g^{1/4}/r$ aufgetragen. Es zeigt sich, daß sie praktisch bis auf eine Proportionalitätskonstante gleich sind. Da die Ortsabhängigkeit der Determinante im Wesentlichen von der Ortsabhängigkeit der $\alpha$-$\alpha$-Massen $f_m^{(s)}$ bzw. $f_m^{(a)}$ bestimmt wird, wird die Barriere vorwiegend durch diese Massen erzeugt. Dieser Sachverhalt ist in Fig. 14 dargestellt, in der das Zusatzpotential, welches man unter Berücksichtigung aller Freiheitsgrade erhält, mit dem verglichen wird, welches entsteht, wenn man von Anfang an nur die r-Bewegung zuläßt.

Das Potential hängt also entscheidend davon ab, daß man die Entkopplung zwischen den Freiheitsgraden erst nach der Inversion des Massentensors und nach der Berechnung der Zusatzpotentiale durchführt. Physikalisch bedeutet dies, daß ein wesentlicher Anteil des Widerstandes in der Relativbewegung dadurch erzeugt wird, daß sich bei dieser Bewegung die Massen in allen anderen Freiheitsgraden ändern müssen. Dieser Anteil bleibt unberücksichtigt, wenn man die anderen Freiheitsgrade von Anfang an vernachlässigt.

## IV.) Zusammenfassung und Ausblick

Es wurde gezeigt, wie kollektive ortsabhängige Massen in die Streutheorie einzubauen sind. Die Schrödingergleichung kann auf eine Form transformiert werden, die der üblichen Schrödingergleichung im optischen Modell entspricht. Es entstehen bei dieser Transformation Zusatzpotentiale. Berechnet man die kollektiven Massen im Cranking-Modell mit Hilfe eines Zwei-Zentren-Modells, so entsteht im Fall der $^{12}C$-$^{12}C$ Streuung eine etwa 30 MeV hohe Barriere, welche die Molekülzustände von den Compoundkernzuständen trennt. Diese Barriere kann einen großen Einfluß auf die Berechnung von Fusionsquerschnitten haben.

Es bleibt zu untersuchen, ob es ähnliche Effekte auch in anderen leichten oder schweren Kern-Kern-Systemen gibt. Weiterhin bleibt die Frage zu klären, ob die Berücksichtigung anderer Freiheitsgrade diese Barriere verändert.

In dieser Arbeit wurden keine Potentiale berechnet. Zur Beschreibung des Streuvorgangs müssen Potentiale für die Relativbewegung, die Oberflächenschwingungen und Kopplungspotentiale zwischen diesen Freiheitsgraden konsistent in einem entsprechenden Modell berechnet werden. Solche Rechnungen sind in Vorbereitung[32]. Auch diese Potentiale werden durch die Transformation abgeändert.

Man muß weiterhin beachten, daß nun die Nullpunktsenergien für die Oberflächenschwingungen vom Abstand der Kerne abhängen. Die Streupotentiale müssen daraufhin korrigiert werden.

Mit den berechneten Massen und den noch zu berechnenden Potentialen können die Streuquerschnitte auf die übliche Art[7] berechnet werden.

## Anhang A

### Transformation der Differentialgleichung

a) Transformationsoperator $\hat{S}$

Der kinetische Energieoperator hat folgende Gestalt (entsprechend (2.10):

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2}\Big\{ g^{11}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + g^{11}\Big(\frac{1}{g^{11}}\frac{\partial g^{11}}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{g^{11}}\frac{\partial g^{1\mu}}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2}\frac{g^{1\mu}}{g^{11}}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^\mu} + 2\,\frac{g^{1\mu}}{g^{11}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big)\frac{\partial}{\partial r} + \Big(g^{-1/2}\frac{\partial g^{1\mu} g^{1/2}}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x^\mu} + g^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x^\mu} g^{\mu\nu} g^{1/2}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big)\Big\} \tag{A.1}$$

Der Operator $\hat{T}$ wird mit dem Operator $\hat{S}$ transformiert:

$$\hat{T} \rightarrow \hat{S}^{-1}\,\hat{T}\,\hat{S} \tag{A.2}$$

Zur Abkürzung führen wir folgende Operatoren ein:

$$\begin{aligned} \hat{P} &:= \Big[\frac{\partial}{\partial r}\,,\,\hat{S}\Big]_- \\ \hat{Q} &:= \Big[\frac{\partial}{\partial r}\,,\,\hat{P}\Big]_- \\ \hat{A} &:= a + 2\,\frac{g^{1\mu}}{g^{11}}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \end{aligned} \tag{A.3}$$

mit:

$$a := \frac{1}{g^{11}}\frac{\partial g^{11}}{\partial r} + \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{g^{11}}\frac{\partial g^{1\mu}}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2}\frac{g^{1\mu}}{g^{11}}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^\mu} \tag{A.4}$$

Für den transformierten Operator $\hat{T}$ gilt:

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2}\hat{S}^{-1} g^{11} \hat{S}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\hbar^2}{2}\hat{S}^{-1} g^{11}\left(2\hat{P} + \hat{A}\hat{S}\right)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hbar^2}{2}\hat{S}^{-1}\left\{ g^{11}\hat{Q} + g^{11}\hat{A}\hat{P} + g^{-1/2}\,\frac{\partial g^{1\mu} g^{1/2}}{\partial r}\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,\hat{S} + g^{-1/2}\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\, g^{\mu\nu} g^{1/2}\,\frac{\partial}{\partial x^\nu}\,\hat{S}\right\} \tag{A.5}$$

Aus der Bedingung, daß der Term in $\frac{\partial}{\partial r}$ verschwindet, folgt zusammen mit (A.3):

$$\hat{P} = \left[\frac{\partial}{\partial r}, \hat{S}\right]_- = -\frac{1}{2}\hat{A}\hat{S} \tag{A.6}$$

Hieraus folgt:

$$\hat{Q} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \hat{A}}{\partial r}\hat{S} + \frac{1}{4}\hat{A}^2\hat{S}$$

Diese Beziehungen eingesetzt in (A.5) ergibt

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2}\hat{S}^{-1} g^{11}\hat{S}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\hbar^2}{2}\hat{S}^{-1}\left(\frac{2}{\hbar^2}V_{add} + g^{-1/2}\,\frac{g^{1\mu}}{g^{11}}\,\frac{\partial g^{1\nu} g^{1/2}}{\partial x^\nu}\,\frac{\partial}{\partial x^\mu} + g^{1\mu}\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,\frac{g^{1\nu}}{g^{11}}\,\frac{\partial}{\partial x^\nu} - g^{-1/2}\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\, g^{\mu\nu} g^{1/2}\,\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)\hat{S}$$

Hieraus folgt:

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2}\,\hat{S}^{-1}\,g^{11}\,\hat{S}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2} \qquad (A.7)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2}\,\hat{S}^{-1}\,g^{-1/2}\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(g^{\mu\nu}-\frac{g^{\mu 1}g^{1\nu}}{g^{11}}\right)g^{1/2}\,\frac{\partial}{\partial x^\nu}\,\hat{S}$$

$$+\,\hat{S}^{-1}\,V_{add}\,\hat{S}$$

mit dem Zusatzpotential:

$$V_{add} = \frac{\hbar^2}{4}\,g^{11}\left(\frac{\partial a}{\partial r}+\frac{1}{2}\,a^2+\frac{g^{1\mu}}{g^{11}}\,\frac{\partial a}{\partial x^\mu}\right) \qquad (A.8)$$

Der Operator $\hat{S}$ wird durch die Operatorgleichung (A.6) bestimmt. Es wird folgender Ansatz für $\hat{S}$ gemacht:

$$\hat{S} = \alpha\; e^{:\sigma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}:} \qquad (A.9)$$

Das Zeichen ":  :" bedeutet, daß in der Potenzreihenentwicklung dieses Operators stets die Funktionen $\sigma^\mu$ vor den Operatoren $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ stehen sollen.
Es folgt:

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}\,,\,\hat{S}\right]_- = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial \alpha}{\partial r}\,\hat{S}+\frac{\partial \sigma^\mu}{\partial r}\,\hat{S}\,\frac{\partial}{\partial x^\mu} \qquad (A.10)$$

und:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^\nu}\,,\,\hat{S}\right]_- = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial \alpha}{\partial x^\nu}\,\hat{S}+\frac{\partial \sigma^\mu}{\partial x^\nu}\,\hat{S}\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Dies führt mit (A.3) und (A.6) zu folgenden partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{1}{\alpha} g^{1i} \frac{\partial}{\partial x^i} \alpha + \frac{1}{2} g^{11} a = 0 \tag{A.11}$$

$$g^{1i} \frac{\partial}{\partial x^i} \sigma^\mu + g^{1\mu} = 0 \tag{A.12}$$

Aus (A.11) folgt mit (A.4):

$$g^{1i} \frac{\partial}{\partial x^i} \alpha + \frac{1}{2} g^{-1/2} \alpha \frac{\partial}{\partial x^i} (g^{1/2} g^{1i}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (\alpha g^{1/4} (g^{1i})^{1/2}) = 0 \tag{A.13}$$

Für $r \to \infty$ verschwinden alle Mischmassen $g^{1\mu}$ . (A.13) nimmt asymptotisch folgende Gleichung an:

$$\frac{\partial}{\partial r} (\alpha g^{1/4} (g^{11})^{1/2}) = 0 \tag{A.14}$$

$$\alpha = C g^{-1/4} (g^{11})^{-1/2}$$

Im Asymptotischen soll gelten:

$$\hat{S} (r \to \infty) = \frac{1}{r} \tag{A.15}$$

Dies wird durch folgende Randbedingungen gewährleistet:

$$\lim_{r \to \infty} \sigma^\mu (r, x^\nu) = 0$$

$$\alpha (r, x^\nu) = \frac{1}{r} \qquad r \gg R_{kr} \tag{A.16}$$

Sei $f(r, x^\mu)$ eine beliebige Funktion aller Koordinaten. Dann kann der Kommutator zwischen $\hat{S}$ und f berechnet werden:

$$\hat{S}\, f(r, x^\mu) = \propto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} :\left(\sigma^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^n: f(r, x^\mu) \qquad (A.17)$$

$$= \propto \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{K=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{K} (\sigma)^K f^{(K)}(r, x^\mu) :\left(\sigma^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^{n-K}:$$

wobei $(\sigma)^K f^{(K)}$ eine Abkürzung für folgenden Ausdruck bedeutet:

$$(\sigma)^K f^{(K)} := \sigma^\mu \sigma^\nu \sigma^\lambda * \cdots * \frac{\partial^K f}{\partial x^\mu \partial x^\nu \partial x^\lambda \cdots} \qquad (A.18)$$

Hieraus folgt:

$$\hat{S}\, f(r, x^\mu) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{K!} (\sigma)^K f^{(K)} * \propto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} :\left(\sigma^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^n: \qquad (A.19)$$

Der Term $\frac{1}{K!} (\sigma)^K f^{(K)}(r, x^\mu)$ stellt gerade das K-ten Glied der Taylorentwicklung der Funktion $f(r, x^\mu + \sigma^\mu)$ dar. Es folgt dann aus (A.19):

$$\hat{S}\, f(r, x^\mu) = f(r, x^\mu + \sigma^\mu)\, \hat{S} \qquad (A.20)$$

Oder durch Umbenennung der Argumente:

$$f(r, x^\mu)\, \hat{S} = \hat{S}\, f(r, x^\mu - \sigma^\mu) \qquad (A.21)$$

Entsprechend läßt sich auch die Wirkung des Differential-operators $\hat{S}$ auf die Funktion f berechnen:

$$\left( \hat{S} \, f(r, x^\mu) \right) = \alpha \, f(r, x^\mu + \sigma^\mu)$$

b) Volumenelement

Man kann nun die Transformation des Volumenelements durchführen. Sei $\Psi(r, x^\mu)$ die Wellenfunktion vor der Transformation $\hat{S}$, $\chi(r, x^\mu)$ die Wellenfunktion danach. Dann gilt:

$$\chi(r, x^\mu) = \hat{S}^{-1} \Psi(r, x^\mu) \tag{A.22}$$

oder:

$$\Psi(r, x^\mu) = \hat{S} \, \chi(r, x^\mu) = \alpha \, \chi(r, x^\mu + \sigma^\mu) \tag{A.23}$$

Setzt man dies in das Normintegral ein, so erhält man:

$$N = \int \Psi^*(r, x^\mu) \, \Psi(r, x^\mu) \sqrt{g} \, d\tau_{rx}$$

$$= \int \chi^*(r, x^\mu + \sigma^\mu) \, \chi(r, x^\mu + \sigma^\mu) |\alpha|^2 \sqrt{g} \, d\tau_{rx} \tag{A.24}$$

Führt man die Koordinaten

$$y^\mu := x^\mu + \sigma^\mu \tag{A.25}$$

ein und geht auf das Volumenelement in diesen Koordinaten über, so erhält man:

$$N = \int \chi^*(r, y^\mu)\ \chi(r, y^\mu)\,|\alpha|^2 \sqrt{g}\ \left|\frac{\partial(r, y^\mu)}{\partial(r, x^\mu)}\right|^{-1} d\tau_{ry} \tag{A.26}$$

Das neue Volumenelement ist also gegeben durch:

$$|\alpha|^2 \sqrt{g}\ \left|\frac{\partial(r, y^\mu)}{\partial(r, x^\mu)}\right|^{-1} d\tau_{ry} \tag{A.27}$$

Man muß beachten, daß dieses Volumenelement in anderen Variablen, nämlich in den Variablen $y^\mu$ geschrieben ist.

c) <u>Spezialfall r-abhängiger Massen</u>

Hängen die Massen $g_{ik}$ nur von $r$ ab, so haben die Gleichungen (A.12) und (A.13) folgende Lösung:

$$\alpha(r) = C \cdot g^{-1/4}\ (g^{11})^{-1/2}$$
$$\sigma^\mu(r) = -\int_\infty^r \frac{g^{1\mu}}{g^{11}}\, dr' \tag{A.28}$$

C ist eine Konstante, die durch die Bedingung

$$\alpha(r) = \frac{1}{r} \qquad r \gg R_{kr} \tag{A.29}$$

bestimmt wird.

Mit diesen Lösungen kommutiert der Operator $\hat{S}$ mit allen Massen und allen Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

Der transformierte Hamiltonoperator läßt sich dann nach (A.7), (A.8) und (A.21) schreiben:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2} g^{11} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\hbar^2}{2} g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(g^{\mu\nu} - \frac{g^{\mu 1} g^{1\nu}}{g^{11}}\right) g^{1/2} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$
$$+ V_{add}(r) + V\left(\vec{r}, x^\mu + \int_\infty^r \frac{g^{1\mu}}{g^{11}}\, dr'\right) \tag{A.30}$$

mit:
$$V_{add}(r) = g^{11}\,\frac{\hbar^2}{4}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}\ln\left(g^{11}g^{1/2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\ln\left(g^{11}g^{1/2}\right)\right)^2\right] \tag{A.31}$$

Zur Auswertung des Volumenelements (A.27) muß die Determinate $\frac{\partial(r, y^\mu)}{\partial(r, x^\mu)}$ berechnet werden:

$$\left|\frac{\partial(r, y^\mu)}{\partial(r, x^\mu)}\right| = \left| \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ \frac{\partial\sigma^\mu}{\partial r} & 1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix} \right| = 1 \tag{A.32}$$

Das Volumenelement lautet dann:

$$dV = \frac{g^{11}(r\to\infty)}{g^{11}(r)}\, d\tau_{ry} \tag{A.33}$$

Anhang B

Rotationsinvarianz

a) Inversion der Massenmatrix

Wir gehen von folgendem speziellen Ansatz für die kinetische Energie aus:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \textcircled{H} ( \dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \, \dot{\varphi}^2 ) \qquad \text{(B.1)}$$

$$+ b \, \dot{r} \, \alpha_2^{(s)} \circ Y_2 (\Omega)$$

$$+ d \, \dot{\alpha}_2^{(s)} \circ \left[ \frac{\partial Y_2}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial Y_2}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{J=0,2,4} C_J^{(s)} \left[ \dot{\alpha}_2^{(s)} \otimes \dot{\alpha}_2^{(s)} \right]^{[J]} \circ Y_J$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{J=0,2,4} C_J^{(a)} \left[ \dot{\alpha}_2^{(a)} \otimes \dot{\alpha}_2^{(a)} \right]^{[J]} \circ Y_J$$

Die Massenmatrix $g_{ik}$, die im Prinzip von allen Variablen abhängen kann, zerfällt in zwei Teile, die voneinander entkoppelt sind. Dies ist einerseits der Raum der Koordinaten $\vec{r}$ und $\alpha_{2\mu}^{(s)}$ und andererseits der Raum der Koordinaten $\alpha_{2\mu}^{(a)}$. Die Inverse $g^{ik}$ der Matrix $g_{ik}$ kann daher in diesen Räumen getrennt voneinander berechnet werden.

Wir werden im Raum der Koordinaten $\vec{r}$ und $\alpha_{2\mu}^{(s)}$ invertieren, die Inversion im Raum $\alpha_{2\mu}^{(a)}$ ergibt sich als Spezialfall.

Die Matrix $g_{ik}$ in diesem Unterraum lautet dann gemäß Gleichung (B.1):

$$g_{11} = a$$

$$g_{1\mu} = b \, Y_{2\mu}^{*}$$

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= \sum_J C_J^{(s)} \, (2\mu\, 2\nu \,|\, J m_J)\, Y^*_{J m_J} \\
g_{1\vartheta} &= g_{1\varphi} = 0 \\
g_{\mu\vartheta} &= d \, \frac{\partial}{\partial \vartheta} \, Y^*_{2\mu} \\
g_{\mu\varphi} &= d \, \frac{\partial}{\partial \varphi} \, Y^*_{2\mu} \\
g_{\vartheta\vartheta} &= \textcircled{H} \\
g_{\varphi\varphi} &= \textcircled{H} \sin^2\vartheta
\end{aligned}
\qquad \text{(B.2)}
$$

Für die Inverse wird folgender Ansatz gemacht:

$$
\begin{aligned}
g^{11} &= A \\
g^{1\mu} &= B \, Y_{2\mu} \\
g^{\mu\nu} &= \sum_J C_J \, (2\mu\, 2\nu \,|\, J m_J)\, Y_{J m_J} \\
g^{1\vartheta} &= g^{1\varphi} = 0 \\
g^{\mu\vartheta} &= D \, \frac{\partial}{\partial \vartheta} \, Y_{2\mu} \\
g^{\mu\varphi} &= \sin^{-2}\vartheta \; D \, \frac{\partial}{\partial \varphi} \, Y_{2\mu} \\
g^{\vartheta\vartheta} &= E \\
g^{\varphi\varphi} &= \sin^{-2}\vartheta \; E
\end{aligned}
\qquad \text{(B.3)}
$$

Folgende Relationen liefern die Bestimmungsgleichungen für A, B, $C_J$, D und E:

$$
\delta_i^{\,\kappa} = g_{ie} \, g^{e\kappa} \qquad \text{(B.4)}
$$

Für die Umformungen werden folgende Beziehungen benötigt (nach Ref[16]):

$$\sum_{m_1,m_2} (\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 \mid K\mu)\, Y_{\ell_1 m_1} Y_{\ell_2 m_2} = \sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{K\mu} \tag{B.5}$$

Speziell:

$$\sum_m (-)^m Y_{\ell m} Y_{\ell -m} = \frac{2\ell+1}{4\pi} \tag{B.6}$$

Und:

$$\sum_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} (-)^{\ell_1+\ell_2+\ell_3+\mu_1+\mu_2+\mu_3} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & \mu_2 & -\mu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \lambda_2 & \ell_3 \\ -\mu_1 & m_2 & \mu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & -\mu_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{Bmatrix} \tag{B.7}$$

$$\sum_\mu (-)^\mu Y_{2\mu} \frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{2-\mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sum_\mu (-)^\mu Y_{2\mu} Y_{2-\mu} = 0$$

$$\sum_\mu (-)^\mu Y_{2\mu} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{2-\mu} = 0 \tag{B.8}$$

$$\sum_{\mu} (-)^{\mu} \frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{2\mu} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{2-\mu} = -i \sum_{\mu} \mu (-)^{\mu} Y_{2-\mu} \frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{2\mu}$$

$$= i \sum_{\mu} \mu (-)^{\mu} \left[ Y_{2\mu} \frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{2-\mu} - Y_{2-\mu} \frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_{2\mu} \right] = \sigma$$

Weiterhin können die Differentiationen nach $\vartheta$ und $\varphi$ durch den Drehimpulsoperator $\hat{L}_{1\mu}$ ausgedrückt werden:

$$\hat{L}_{1\,\pm 1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} \pm i \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \qquad \text{(B.9)}$$

$$\hat{L}_{1\,0} = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\hat{L}^2 = -\left( \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right)$$

und:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{-i\varphi} \hat{L}_{1\,+1} + e^{i\varphi} \hat{L}_{1\,-1} \right) \qquad \text{(B.10)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = i \hat{L}_{1\,0}$$

Weiterhin gilt[16]:

$$\hat{L}_{1m} Y_{\ell\mu} = (-)^m \sqrt{\ell(\ell+1)}\; Y_{\ell\, m+\mu} (\ell\, m+\mu\; 1\; -\mu \mid \ell \mu) \qquad \text{(B.11)}$$

Wir führen folgende Hilfsgrößen ein:

$$b =: \sqrt{4\pi} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} h$$

$$B =: \sqrt{4\pi} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} H \qquad \text{(B.12)}$$

$$C_3 =: \sqrt{4\pi} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ \mu & -\mu & 0 \end{pmatrix} f_\mu$$

$$C_3 =: \sqrt{4\pi} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ \mu & -\mu & 0 \end{pmatrix} F_\mu$$

$$d =: \sqrt{\frac{4\pi}{15}}\, \tilde{d}$$

$$D =: \sqrt{\frac{4\pi}{15}}\, \tilde{D}$$

Es werden nun die Gleichungen (B.4) ausgewertet. Als erste Gleichung erhalten wir:

$$1 = \delta_1^1 = a A + b B (-)^m Y_{2-m} Y_{2m}$$

$$a A + h H = 1 \qquad \text{(B.13)}$$

Entsprechend folgt aus der Beziehung:

$$0 = \delta_1^\mu = g_{1i}\, g^{i\mu}$$

$$a H + b F_0 = 0 \qquad \text{(B.14)}$$

Die Gleichungen zu $\delta_1^\vartheta = \delta_1^\varphi = 0$ sind wegen (B.8) stets erfüllt.

Mit (B.8) läßt sich folgendes ableiten:

$$\sum_m (-)^m \frac{\partial}{\partial\varphi} Y_{2m} \frac{\partial}{\partial\varphi} Y_{2-m} = \frac{15}{4\pi} \sin^2\vartheta$$

$$\sum_m (-)^m \frac{\partial}{\partial\vartheta} Y_{2m} \frac{\partial}{\partial\vartheta} Y_{2-m} = \frac{15}{4\pi} \qquad \text{(B.15)}$$

Hiermit ergibt sich sofort aus:

$$\delta_\vartheta^\vartheta = \delta_\varphi^\varphi = 1$$

$$\textcircled{H}\ E \quad + \frac{15}{4\pi}\, d\, D \;=\; 1 \tag{B.16}$$

Entsprechend den unten durchgeführten Rechnungen ergibt sich aus $\delta_\mu^{\nu} = \delta_\mu^{\varphi} = \sigma$:

$$-\, f_1\, D + E\, d \;=\; \sigma \tag{B.17}$$

Folgende Beziehung soll ausführlicher untersucht werden:

$$\delta_\mu^{\mu'} = g_{\mu 1}\, g^{1\mu'} + g_{\mu\nu}\, g^{\nu\mu'} + g_{\mu\vartheta}\, g^{\vartheta\mu'} + g_{\mu\varphi}\, g^{\varphi\mu'} \tag{B.18}$$

Mit Hilfe von (B.10), (B.2) und (B.3) ergibt sich:

$$g_{\mu\vartheta}\, g^{\vartheta\nu} + g_{\mu\varphi}\, g^{\varphi\nu} = -\, D\, d \sum_m (-)^m \left(\hat{L}_{1m} Y^*_{2\mu}\right)\left(\hat{L}_{1-m} Y_{2\nu}\right) \tag{B.19}$$

Somit folgt aus (B.18):

$$\begin{aligned}
\delta_\mu^{\mu'} &= \frac{4\pi}{5}\, h\, H\ (-)^{\mu}\, Y_{2-\mu}\, Y_{2\mu'} \qquad\qquad (B.20)\\
&+ 4\pi \sum (-)^{m_3}\, (2\mu\, 2m' \mid 3 m_3)\, (2m'\, 2\mu' \mid 3' m_3')\\
&\quad Y_{3\,-m_3}\, Y_{3' m_3'} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ \nu & -\nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3' \\ \nu' & -\nu' & 0 \end{pmatrix} f_\nu\, F_{\nu'}\\
&- \frac{4\pi}{15}\, \tilde{d}\, \tilde{D} \sum (-)^m \left(\hat{L}_{1m}\, Y^*_{2\mu}\right)\left(\hat{L}_{1-m}\, Y_{2\mu'}\right)
\end{aligned}$$

Zusammen mit (B.5), (B.6) und (B.11) liefert dies:

$$\delta_{\mu}^{\mu'} = \sqrt{4\pi} \sum (-)^{\mu} (2 -\mu\, 2\mu' | \ell m)\, Y_{\ell m}$$

$$* \Big[ h H \begin{pmatrix} 2 & 2 & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum \sqrt{(2j+1)(2j'+1)} \tag{B.21}$$

$$\begin{pmatrix} j & j' & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j & j' & \ell \\ 2 & 2 & 2 \end{Bmatrix} (2\nu\, 2 -\nu | j\, 0)(2\nu' 2 -\nu' | j' 0)$$

$$f_{\nu} F_{\nu'} - 10 \begin{pmatrix} 2 & 2 & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 2 & 2 & \ell \\ 2 & 2 & 1 \end{Bmatrix} \tilde{\alpha}\, \tilde{D} \Big]$$

Da diese Gleichung für alle Winkel gelten soll, folgt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} h H + \sum_{\nu} (-)^{\nu} \begin{pmatrix} 2 & 2 & \ell \\ \nu & -\nu & 0 \end{pmatrix} f_{\nu} F_{\nu}$$

$$- 10 \begin{pmatrix} 2 & 2 & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 2 & 2 & \ell \\ 2 & 2 & 1 \end{Bmatrix} \tilde{\alpha}\, \tilde{D} = \sqrt{5}\, \delta_{\ell,0} \tag{B.22}$$

Hieraus folgen folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} h H + f_0 F_0 &= 1 \\ \tilde{\alpha}\, \tilde{D} + f_1 F_1 &= 1 \\ f_2 F_2 &= 1 \end{aligned} \tag{B.23}$$

Die Gleichungen (B.13), (B.14), (B.16), (B.14) und (B.23) besitzen folgende Lösung:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{a}\,\frac{1}{1-\frac{h^2}{a f_0^{(s)}}} \\
H &= -\frac{h}{a f_0^{(s)}}\,\frac{1}{1-\frac{h^2}{a f_0^{(s)}}} \\
F_0^{(s)} &= \frac{1}{f_0^{(s)}}\,\frac{1}{1-\frac{h^2}{a f_0^{(s)}}} \\
F_1^{(s)} &= \frac{1}{f_1^{(s)}}\,\frac{1}{1+\frac{\alpha^2}{\omega f_1^{(s)}}} \\
F_2^{(s)} &= \frac{1}{f_2^{(s)}} \\
\tilde{D} &= \frac{\tilde{\alpha}}{f_1^{(s)}\omega}\,\frac{1}{1+\frac{\alpha^2}{\omega f_1^{(s)}}} \\
E &= \frac{1}{\omega}\,\frac{1}{1+\frac{\alpha^2}{\omega f_1^{(s)}}}
\end{aligned}
\qquad \text{(B.24)}
$$

Diese Gleichungen sind sehr symmetrisch, wenn man das Vorzeichen von $f_0^{(s)}$ und $f_1^{(s)}$ berücksichtigt. Asymptotisch gilt nämlich

$$f_0^{(s)} = -f_1^{(s)} \quad .$$

Die Gleichungen für die Koordinaten $\alpha_{2\mu}^{(a)}$ erhält man, indem man die Kopplung an die r-Bewegung Null setzt:

$$F_\mu^{(a)} = \frac{1}{f_\mu^{(a)}} \qquad \text{(B.25)}$$

Die Determinante $g$ kann nun folgendermaßen berechnet werden. Es gilt die Beziehung:

$$g^{ik} = \frac{1}{g}\,\frac{\partial g}{\partial g_{ik}} \qquad \text{(B.26)}$$

Sei nun $\gamma$ eine beliebige Variable, so folgt:

$$\sum_{i,k} g^{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial \gamma} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln g \qquad \text{(B.27)}$$

Daraus ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial a} &= A \\
\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial h} &= 2H \\
\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial f_m^{(s)}} &= F_m^{(s)} \\
\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial f_m^{(a)}} &= F_m^{(a)} \\
\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \textcircled{H}} &= 2E \\
\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \tilde{d}} &= 4\tilde{D} \\
\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \vartheta} &= 2 \cot \vartheta
\end{aligned} \qquad \text{(B.28)}$$

Hieraus bestimmt man die Determinante g bis auf eine Konstante, die für $r \to \infty$ bestimmt wird:

$$g = Const * \textcircled{H}^2 \sin^2 \vartheta \; a \left(1 - \frac{h^2}{a f_0^{(s)}}\right) \qquad \text{(B.29)}$$

$$* \left(1 + \frac{\tilde{d}^2}{\textcircled{H} f_1^{(s)}}\right)^2 \prod_{m=-2}^{2} f_m^{(s)} f_m^{(a)}$$

Zur Vollständigkeit soll noch folgender Ausdruck berechnet werden, der in (2,32) auftritt:

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{g^{\mu 1} g^{1\nu}}{g^{11}} \tag{B.30}$$

Aus dem Ansatz für die $g^{ik}$ folgt:

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \sum_{J,m_J} C_J (2\mu\, 2\nu \mid J m_J)\, Y_{Jm_J} - \frac{B^2}{A} Y_{2\mu}\, Y_{2\nu} \tag{B.31}$$

$$= \sum_{J,m_J} \left( C_J - \frac{B^2}{A} \frac{5}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & J \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) (2\mu\, 2\nu \mid J m_J)\, Y_{Jm_J}$$

$$= \sum_{J,m_J} \tilde{C}_J\, (2\mu\, 2\nu \mid J m_J)\, Y_{Jm_J}$$

Schreibt man $\tilde{C}_J$ gemäß (B.12):

$$\tilde{C}_J = \sqrt{4\pi} \sum_{\mu} \begin{pmatrix} 2 & 2 & J \\ \mu & -\mu & 0 \end{pmatrix} \tilde{F}_\mu \tag{B.32}$$

so gilt:

$$\tilde{F}_\mu = F_\mu - \delta_{\mu,0} \frac{H^2}{A} \tag{B.33}$$

b) Kommutator zwischen $\hat{L}$ und $\hat{S}$

Wir verwenden in diesen Rechnungen nur den Teil von $\hat{S}$, der nicht mit $\hat{L}$ kommutiert.

Nach Anhang A (A.28) folgt:

$$\hat{S} = e^{:-Y_{2\mu}\int_{\infty}^{r}\frac{B}{A}dr'\frac{\partial}{\partial\alpha_{2\mu}}:} \tag{B.33}$$

Wir definieren die Funktion:

$$\beta(r) := -\int_{\infty}^{r}\frac{H}{A}dr' \equiv \int_{\infty}^{r}\frac{h}{f_0^{(s)}}dr' \tag{B.34}$$

und erhalten dann:

$$\hat{S} = e^{\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\frac{\beta}{i\hbar}Y_2\circ\pi_2^*} \tag{B.35}$$

Mit der Gleichung (B.11) erhalten wir sofort den Kummutator:

$$\left[\hat{L}_{1\mu},\hat{S}\right]_- = \hat{S}\sqrt{8\pi}\,\frac{\beta}{i\hbar}\left[Y_2\otimes\pi_2^*\right]^{[1,\mu]} \tag{B.36}$$

Nach einigen trivialen Umformungen folgt hieraus:

$$\left[\hat{L}^2,\hat{S}\right]_- = \hat{S}\left\{\sqrt{\frac{6}{5}\cdot 4\pi}\,\frac{\beta}{i\hbar}\,*\right. \tag{B.37}$$

$$\left(\left[\hat{L}_1\otimes\pi_2^*\right]^{[2]}\circ Y_2 + Y_2\circ\left[\hat{L}_1\otimes\pi_2^*\right]^{[2]}\right)$$

$$\left.-\sqrt{4\pi}\,\frac{30\beta^2}{\hbar^2}\begin{pmatrix}2&2&K\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}2&2&K\\2&2&1\end{Bmatrix}\left[\pi_2^*\otimes\pi_2^*\right]^{[K]}\circ Y_K\right\}$$

Hierbei wurde folgende Identität benutzt:

$$\left[\pi_2^* \otimes Y_2\right]^{[1]} \circ \left[\pi_2^* \otimes Y_2\right]^{[1]}$$

$$= \frac{15}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 2 & 2 & K \\ 2 & 2 & 1 \end{Bmatrix} \left[\pi_2^* \otimes \pi_2^*\right]^{[K]} \circ Y_K \qquad \text{(B.38)}$$

Mit diesen Gleichungen können leicht die Zusatzterme in (2.34) angegeben werden. Man erhält:

$$\tilde{\tilde{D}} = \sqrt{\frac{2}{5} \cdot 4\pi}\ (\tilde{D} + \sqrt{3}\,\beta E) \qquad \text{(B.39)}$$

$$\tilde{\tilde{F}}_1 = F_1 - \frac{3}{2}\left(\beta^2 E + \sqrt{\frac{4}{3}}\,\beta \tilde{D}\right) \qquad \text{(B.40)}$$

Die anderen Terme werden nicht geändert.

Anhang C

Inversion bei Entartung

Im Cranking-Modell ergibt sich die Masse $g_{xy}$ für zwei Freiheitsgrade x und y zu:

$$g_{xy} = 2\hbar^2 \sum_{\substack{i \le F \\ j > F}} \frac{\langle i|\frac{\partial}{\partial x}|j\rangle \langle i|\frac{\partial}{\partial y}|j\rangle^*}{\varepsilon^j - \varepsilon^i} \qquad (C.1)$$

Der Index i läuft über alle besetzten Zustände, der Index j über alle unbesetzten. Die Energien der Niveaus seien durch $\varepsilon^i$ bzw. $\varepsilon^j$ gegeben.

Wir gehen von der Voraussetzung aus, daß ein besetzter Zustand i = o mit einem unbesetzten j = 1 fast entartet ist, das heißt:

$$\varepsilon := \varepsilon^1 - \varepsilon^0 \ll \varepsilon^j - \varepsilon^i \qquad \text{für alle anderen i und j} \qquad (C.2)$$

Die vollständige Massenmatrix $g_{ik}$ in diesen zwei Koordinaten läßt sich damit folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} g_{xx} &= 2\hbar^2 \left\{ \frac{|a_x|^2}{\varepsilon} + R_{xx} \right\} \\ g_{xy} &= 2\hbar^2 \left\{ \frac{a_x a_y^*}{\varepsilon} + R_{xy} \right\} \\ g_{yx} &= 2\hbar^2 \left\{ \frac{a_x^* a_y}{\varepsilon} + R_{yx} \right\} \\ g_{yy} &= 2\hbar^2 \left\{ \frac{|a_y|^2}{\varepsilon} + R_{yy} \right\} \end{aligned} \qquad (C.3)$$

mit den Abkürzungen:

$$a_x := \langle 0|\frac{\partial}{\partial x}|1\rangle \qquad (C.4)$$

$$a_\gamma := \langle 0 | \frac{\partial}{\partial \gamma} | 1 \rangle$$

$$R_{x\gamma} := \sum_{\substack{i \le F \\ j > F \\ (i,j) \neq (0,1)}} \frac{\langle i | \frac{\partial}{\partial x} | j \rangle \langle i | \frac{\partial}{\partial \gamma} | j \rangle^*}{\varepsilon^j - \varepsilon^i}$$

Wie bekannt, divergieren die Massen bei Entartung ( $\varepsilon \to 0$). Die Determinate $g$ der Matrix $g_{ik}$ läßt sich leicht berechnen:

$$g = \left(\frac{2\hbar^2}{\varepsilon}\right)^2 \Big\{ |a_x a_\gamma|^2 - |a_x a_\gamma|^2 + \varepsilon \Big( \tag{C.5}$$

$$|a_x|^2 R_{\gamma\gamma} + |a_\gamma|^2 R_{xx} - a_x^* a_\gamma R_{x\gamma} - a_x a_\gamma^* R_{\gamma x} \Big)$$

$$+ \varepsilon^2 \left( R_{xx} R_{\gamma\gamma} - R_{x\gamma} R_{\gamma x} \right) \Big\}$$

oder:

$$g = \frac{4\hbar^2}{\varepsilon} \Big\{ |a_x|^2 R_{\gamma\gamma} + |a_\gamma|^2 R_{xx} - a_x^* a_\gamma R_{x\gamma} \tag{C.6}$$

$$- a_x a_\gamma^* R_{\gamma x} + \varepsilon \left( R_{xx} R_{\gamma\gamma} - R_{x\gamma} R_{\gamma x} \right) \Big\}$$

Die Inverse $g^{ik}$ ergibt sich durch die reduzierten Minoren:

$$g^{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{g} \tag{C.7}$$

Hierbei beschreibt $\Delta_{ik}$ die Determinante der Matrix, die man erhält, wenn man aus der Matrix $g_{ik}$ die i-te Zeile und die K-te Spalte streicht.

Wir geben als Beispiel die Masse $g^{xx}$ an:

$$(g^{xx})^{-1} = \frac{g}{g_{yy}} = 2\hbar^2 \left( \frac{|a_x|^2 R_{yy} + |a_y|^2 R_{xx}}{|a_y|^2 + \varepsilon R_{yy}} \right. \tag{C.8}$$

$$\left. - \frac{a_x^* a_y R_{xy} + a_x a_y^* R_{yx}}{|a_y|^2 + \varepsilon R_{yy}} \right)$$

$$+ 2\hbar^2 \varepsilon \quad \frac{R_{xx} R_{yy} - R_{xy} R_{yx}}{|a_y|^2 + \varepsilon R_{yy}}$$

Für $\varepsilon \to 0$ nimmt diese Masse folgenden Wert an:

$$(g^{xx})^{-1} = 2\hbar^2 \left\{ R_{xx} + \left|\frac{a_x}{a_y}\right|^2 R_{yy} - \left(\frac{a_x}{a_y}\right) R_{yx} - \left(\frac{a_x}{a_y}\right)^* R_{xy} \right\} \tag{C.9}$$

Für die anderen Massen ergeben sich ähnliche Werte. Wie man sieht, bleiben die ursprünglich divergenten Massen durch die Invertierung endlich.

Eine entsprechende Beziehung läßt sich auch für beliebig viele Freiheitsgrade $N > 1$ ableiten. Die Massen schreiben sich entsprechend (C.3):

$$g_{ik} = \frac{2\hbar^2}{\varepsilon} \left( a_i a_k^* + \varepsilon R_{ik} \right) \tag{C.10}$$

Für die Berechnung der Determinante $g$ formen wir (C.10) mit Hilfe der Inversen $R^{ik}$ der Matrix $R_{ik}$ um:

$$g_{ik} = \frac{2\hbar^2}{\varepsilon} \left( a_i a_e^* R^{em} + \varepsilon \delta_{im} \right) R_{mk} \tag{C.11}$$

Entwickelt man die Determinante nach $\varepsilon$, so ergibt sich in den niedrigsten Ordnungen:

$$g \simeq \left(\frac{2\hbar^2}{\varepsilon}\right)^N \left\{ |(a_i a_k^*)| + \varepsilon |(R_{mk})| \cdot Sp\,(a_i a_e^* R^{em}) \right\} \tag{C.12}$$

Es gilt:

$$\left| (a_i\, a_m^*) \right| = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{N} a_i\, a_{i\sigma}^* = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{N} |a_i|^2 = \mathcal{O} \tag{C.13}$$

da es für $N > 1$ soviele gerade wie ungerade Permutationen gibt. Somit folgt für $g$:

$$g \simeq (2\hbar^2)^N \varepsilon^{1-N} \det(R_{ik}) \cdot Sp(a_i a_\ell^* R^{\ell k}) \tag{C.14}$$

Gemäß Gleichung (C.7) benötigt man die Minoren $\Delta_{ik}$. In niedrigster Ordnung in $\varepsilon$ gilt:

$$\Delta_{ik} \simeq \left(\frac{2\hbar^2}{\varepsilon}\right)^{N-1} \Delta_{ik}^{(a)} \tag{C.15}$$

Hierbei sind $\Delta_{ik}^{(a)}$ die Minoren der Matrix $a_i a_k^*$.
Man erhält für $g^{ik}$:

$$g^{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{g} = \frac{1}{2\hbar^2} \frac{\Delta_{ik}^{(a)}}{\det(R_{ik}) \cdot Sp(a_i a_\ell^* R^{\ell k})} \tag{C.16}$$

Diese Größen sind im Allgemeinen für $\varepsilon \longrightarrow 0$ endlich.

Anhang D

Berechnung der Massen im Zwei-Zentren-Modell

Im Cranking-Modell wird die Masse $B_{xy}$ durch folgenden Ausdruck bestimmt (siehe III.1 und ref[8]):

$$B_{xy} = 2\hbar^2 \sum_{\substack{i \le F \\ j > F}} \frac{\langle i | \frac{\partial H}{\partial x} | j \rangle \langle j | \frac{\partial H}{\partial y} | i \rangle}{(\varepsilon^j - \varepsilon^i)^3} \qquad (D.1)$$

Für den Einteilchenhamiltonoperator H machen wir folgenden Ansatz, in dem alle Koordinaten im Laborsystem gemessen werden[20, 21]:

$$H := \frac{\tilde{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \tilde{r}'^2 \left(1 - 2 \sum_{i=1}^{2} f(i)\, \alpha_{2M}^{(i)}\, Y_{2M}^{*}(\tilde{\Omega})\right) \qquad (D.2)$$

mit

f(i) = 1 im Gebiet i, sonst o

$\tilde{\Omega}$ ist der Winkel der Einteilchenkoordinate $\tilde{r}$, welche im körperfesten System folgendermaßen definiert werden kann (siehe Fig. 3):

$$\begin{aligned} \tilde{x}' &:= \tilde{x} \\ \tilde{y}' &:= \tilde{y} \\ \tilde{z}' &:= \tilde{z} - \frac{1}{2}\varepsilon(z)\, r \end{aligned} \qquad (D.3)$$

Die Koordinate r ist der Relativabstand der Zentren und für $\varepsilon$ gilt:

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} 1 & z > 0 \\ -1 & z < 0 \end{cases} \qquad (D.4)$$

Der Ansatz (D.2) stellt den symmetrischen Zweizentren-Hamiltonoperator mit einer Störung, die durch die $\alpha_{2\mu}$ beschrieben wird, dar.

In niedrigster Ordnung in $\alpha$ ergibt sich:

$$\frac{\partial H}{\partial r} = m\omega^2 \left( \tilde{r}'^2 \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{2} \varepsilon(z) \tilde{z}' \right) \tag{D.5}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha^{(i)}_{2\mu}} = - m\omega^2 \tilde{r}'^2 f(i) Y^*_{2\mu}(\tilde{\Omega}) \tag{D.6}$$

Gleichung (D.6) kann in das körperfeste System nach folgender Gleichung transformiert werden[16]:

$$Y_{\ell m}(\Omega_{Lab}) = (-)^{m+m'} D^{(\ell)}_{m',m}(\omega) Y_{\ell m'}(\Omega_{körp}) \tag{D.7}$$

Es gilt:

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha^{(i)}_{2\mu}} = - m\omega^2 \tilde{r}'^2 f(i) (-)^{\mu+\nu} D^{(2)*}_{\nu,\mu} Y^*_{2\nu}(\Omega_K) \tag{D.8}$$

Es können jetzt alle Matrixelemente in (D.1) im körperfesten System berechnet werden.

Die r-r-Masse ergibt sich sofort:

$$g_{rr} = \frac{1}{2} m^2 \omega^4 \hbar^2 \sum_{\substack{i \le F \\ j > F}} \frac{|\langle i | g_r | j \rangle|^2}{(\varepsilon^j - \varepsilon^i)^3} \tag{D.9}$$

mit $$g_r := - \tilde{z}' \varepsilon(z) + 2 \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial r} \tilde{r}'^2$$

Die Masse $g_{r\alpha^{(K)}_{j\mu}}$ führt zuerst auf $\nu = 0$. Dann folgt:

$$g_{r\,\alpha^{(k)}_{2\mu}} = m^2\omega^4\hbar^2\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\; Y^*_{2\mu} \sum_{\substack{i\le F\\ j>F}} \frac{\langle i|g_r|j\rangle\langle j|Y^{(k)}_{20}|i\rangle}{(\varepsilon^j-\varepsilon^i)^3} \qquad (D.10)$$

mit:

$$Y^{(k)}_{\ell m} := f(k)\,\tilde{r}^{\,\ell}\,Y_{\ell m}(\tilde{\Omega}) \qquad (D.11)$$

Als letzten Term erhalten wir:

$$g_{\alpha^{(k)}_{2\mu}\alpha^{(\ell)}_{2\nu}} = 2m^2\omega^4\hbar^2 \sum_J \sqrt{\frac{4\pi}{2J+1}} \qquad (D.12)$$

$$(2\mu\,2\nu|J\,M)\; Y^*_{J\,M}\quad (2\,m\,2-m|J\,0)$$

$$\sum_{\substack{i\le F\\ j>F}} \frac{\langle i|Y^{(k)}_{2-m}|j\rangle\langle j|Y^{(\ell)}_{2m}|i\rangle}{(\varepsilon^j-\varepsilon^i)^3}$$

Die Massen sind invariant gegen die Vertauschung von k mit l. Da der Hamiltonoperator auch invariant unter der Vertauschung von k und l und der Raumspieglung $\vartheta \to \pi - \vartheta$ , $\varphi \to \pi + \varphi$ ist, so folgt, daß sich die Summe in (D.12) nur über gerade J-Werte erstreckt.

Aus denselben Invarianzen sieht man sofort, daß beim Übergang auf die symmetrischen und antimetrischen Koordinaten

$$\alpha^{(s)}_{2\mu} := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha^{(1)}_{2\mu} + \alpha^{(2)}_{2\mu}\right)$$
$$\alpha^{(a)}_{2\mu} := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha^{(1)}_{2\mu} - \alpha^{(2)}_{2\mu}\right) \qquad (D.13)$$

die Koordinaten $\alpha^{(s)}_{2\mu}$ und $\alpha^{(a)}_{2\mu}$ nicht mehr miteinander koppeln und die Koordinate $\alpha^{(a)}_{2\mu}$ nicht mehr an die r-Bewegung koppelt.

Man erhält dann unmittelbar die Massen:

$$g_{rr} = a$$

$$g_{r\alpha^{(s)}_{2\mu}} = \sqrt{4\pi} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y^*_{2\mu}\, h \qquad \text{(D.14)}$$

$$g_{\alpha^{(s)}_{2\mu}\alpha^{(s)}_{2\nu}} = \sqrt{4\pi} \sum_J (2\mu\, 2\nu | J M)\, Y^*_{JM} \begin{pmatrix} 2 & 2 & J \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} f^{(s)}_m$$

$$g_{\alpha^{(a)}_{2\mu}\alpha^{(a)}_{2\mu}} = \sqrt{4\pi} \sum_J (2\mu\, 2\nu | J M)\, Y^*_{JM} \begin{pmatrix} 2 & 2 & J \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} f^{(a)}_m$$

mit:

$$a := \frac{1}{2} m^2 \omega^4 \hbar^2 \sum \frac{|\langle i | g_r | j \rangle|^2}{(\varepsilon^j - \varepsilon^i)^3} \qquad \text{(D.15)}$$

$$h := \frac{1}{\sqrt{2}} m^2 \omega^4 \hbar^2 \sum \frac{\langle i | g_r | j \rangle \langle j | y^{(1)}_{20} + y^{(2)}_{20} | i \rangle}{(\varepsilon^j - \varepsilon^i)^3}$$

$$f^{(s)}_m := m^2 \omega^4 \hbar^2 \sum (-)^m \frac{|\langle i | y^{(1)}_{2m} + y^{(2)}_{2m} | j \rangle|^2}{(\varepsilon^j - \varepsilon^i)^3}$$

$$f^{(a)}_m := m^2 \omega^4 \hbar^2 \sum (-)^m \frac{|\langle i | y^{(1)}_{2m} - y^{(2)}_{2m} | j \rangle|^2}{(\varepsilon^j - \varepsilon^i)^3}$$

Üblicherweise führt man im Einteilchenoperator einen $\vec{L} \cdot \vec{S}$-Term ein. Es besitzt folgende Gestalt[21]:

$$V_{es} = - \frac{2\hbar K}{m\omega_0} (\vec{\nabla} V \times \vec{p}) \cdot \vec{S} \qquad \text{(D.16)}$$

$\omega_0$ ist eine Konstante für jeden Streuprozess. Wird auch $K$ konstant gewählt, so folgt:

$$\frac{\partial V_{es}}{\partial r} = - \frac{\hbar K}{m\omega_0} \left( \frac{\partial L_+}{\partial r} S_- + \frac{\partial L_-}{\partial r} S_+ \right)$$

$$= \frac{1}{2} \hbar K \frac{\omega^2}{\omega_0} f(z) \left\{ e^{-i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial s} - i \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) S_+ \right. \qquad \text{(D.17)}$$

$$\left. - e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial s} + i \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) S_- \right\}$$

Dieser Term muß zu $G_r$ in (D.9) hinzugefügt werden, wenn man den $\vec{L} \cdot \vec{S}$ - Term mit berücksichtigt. Alle auftretenden Matrixelemente sind in Ref[21] berechnet worden.

## VI.) Figuren

Fig. 1

Einfluß der Paarkraft bei Levelcrossing.

Ohne Paarkraft entarten zwei Niveaus (durchgezogene Linien). Die Cranking-Massen divergieren an diesem Punkt. Schaltet man die Paarkraft ein, so wird die Entartung aufgehoben (gestrichelte Linien). Die Massen bleiben endlich.

Fig. 2

Levelschema für Kern-Kern-Systeme mit einer Nukleonenzahl zwischen 24 und 32 aufgetragen gegenüber dem Zentrenabstand r. Die Fermikanten für die Reaktionen $^{12}C$-$^{12}C$ und $^{16}O$-$^{16}O$ sind eingezeichnet. Nur im Falle von $^{16}O$-$^{16}O$ schneidet ein besetztes Niveau ein unbesetztes (Pfeil).

Fig. 3

Definition der Koordinaten. Das Kern-Kern-System wird durch die gestrichelte Fläche in zwei Bereiche geteilt. In den beiden Gebieten sind die Oberflächenkoordinaten $\alpha^{(1)}$ bzw. $\alpha^{(2)}$ in der üblichen Art um das entsprechende Zentrum definiert.

Fig. 4

Die symmetrischen und antimetrischen Koordinaten $\alpha_{2\mu}^{(s)}$ bzw. $\alpha_{2\mu}^{(a)}$ für r = o. In a.) gilt $\alpha_{2\mu}^{(a)} = \sigma$ ; die Koordinate $\alpha_{2\mu}^{(s)}$ beschreibt eine Quadrupoldeformation des Systems. In b.) ist $\alpha_{2\mu}^{(s)} = o$ gesetzt.

$\alpha_{2\mu}^{(a)}$ beschreibt in erster Näherung eine Oktopoldeformation des Systems.

Fig. 5

Einfluß einer Änderung in $\xi$ auf $\eta$ .

In a.) schneidet bei der Änderung von $\xi$ kein besetztes Niveau des einen Topfes ein unbesetztes des anderen Topfes. Daher wird auf Grund der Auffüllvorschrift kein Nukleon vom einen Potentialtopf in den anderen übertragen. In b.) dagegen schneidet ein besetztes Niveau ein unbesetztes und die Nukleonen werden ausgetauscht.

Fig. 6

Abhängigkeit der Funktion $\xi(\eta)$ von r.

Teil a.) zeigt die Funktion $\xi(\eta)$ für drei verschiedene Abstände der Kern-Zentren voneinander. Im Teil b.) wurde die Ableitung $\frac{\partial \xi}{\partial \eta}$ im Asymptotischen ($r \gg R_{kr}$) gebildet.

Fig. 7

Massen für das System $^{12}C$-$^{12}C$.

Die Massen für die r-Bewegung a(r) und für die symmetrischen Koordinaten $\alpha_{2\mu}^{(s)}$ , $f_m^{(s)}$ sind gegen den Abstand der Zentren aufgetragen. Charakteristisch ist der Abfall der Massen in der Gegend von 5 - 6 fm. Die Massen $f_m^{(a)}$ sind nicht dargestellt. Sie unterscheiden sich jedoch nur wenig von den Massen $f_m^{(s)}$ .

Fig. 8

Die Reziproken der invertierten Massen.

In a.) ist das Reziproke der inversen Massen $A(r)$ für das System $^{12}C$-$^{12}C$ aufgetragen. Die Massen, die in der sudden Approximation berechnet wurden, lassen sich graphisch nicht von den adiabatischen Massen trennen. Zum Vergleich zeigt b.) die entsprechende Masse für das System $^{16}O$-$^{16}O$.
In c.) wird eine $\alpha$ -Masse gezeigt, die dem Reziproken der Masse $C_o^{(s)}$ proportional ist. Sie entspricht der üblichen $\alpha$ -Schwingungsmasse $B^{(s)}$ und ist folgendermaßen definiert.

$$\frac{1}{2B^{(s)}} \sum_{\mu} (-)^{\mu} \pi_{2\mu}^{(s)*} \pi_{2-\mu}^{(s)*} = \frac{1}{2} C_o^{(s)} \left[ \pi_2^{(s)*} \otimes \pi_2^{(s)*} \right]^{[0]} \circ Y_{00}$$

Auch hier unterscheiden sich adiabatische und sudden Näherung kaum voneinander.

Asymptotisch gehen die Massen $A(r)^{-1}$ in die experimentellen reduzierten Massen über. Die Masse für die $\alpha$ -Schwingung, die man aus der Energie des ersten $2^+$-Zustandes in $^{12}C$ und dem B (E2)-Wert zwischen diesem Zustand und dem Grundzustand berechnen kann[33], ist um etwa einen Faktor 2.25 kleiner als die Masse $B^{(s)}(r \to \infty)$.

Fig. 9

Beiträge zu den kollektiven Massen.

Teil a.) zeigt die Niveaus in der Nähe der Fermikante für das System $^{12}C$-$^{12}C$. Sie sind so normiert, daß die Fermikante stets Null entspricht. Sie sind von der Fermikante F aus durchnummeriert. Die Projektion des Spins ist angegeben.

In b.) sind die Hauptbeiträge $\frac{|\langle i|r^2 Y_{20}|k\rangle|^2}{(\varepsilon^k - \varepsilon^i)^3}$ dargestellt. Die Zustände i und k, zwischen den die Matrixelemente genommen werden, sind angegeben und beziehen sich auf a.). N bedeutet Neutronen und P Protonen.

Fig. 10

Differenz zwischen Mittelpunkt und Schwerpunkt der Fragmente. Im Überlappgebiet unterscheiden sich Mittelpunkt und Schwerpunkt der Zentren. Die Schwerpunkte bewegen sich langsamer aufeinander zu als die Mittelpunkte. Die Masse, die zu der Bewegung der Zentren gehört, ist daher kleiner als die zu der Bewegung der Schwerpunkte (welche in erster Näherung gleich der reduzierten Masse ist.

Fig. 11

Beiträge zum Streupotential.

Kurve 1 zeigt das von Morović[29] berechnete sudden Potential multipliziert mit dem Massenfaktor $1/(g^{11}m)$. Das entsprechend normierte Potential $V_{add}(r)$ ist in Kurve 2 dargestellt. Bei etwa 5 fm Abstand zeigt es ein Maximum von etwa 30 MeV. Das energieabhängige Potential ist in Kurve 3 für die Energie E = 10 MeV gezeichnet.

Fig.12

Effektives Streupotential.

Das effektive Streupotential ergibt sich als Summe der drei Komponenten aus Fig. 11. Es ist für E = o MeV und E = 10 MeV gezeichnet.

Fig. 13

Beiträge zum Zusatzpotential.

Das Potential $V_{add}$ wird durch die Ableitungen der Funktion $\gamma(r) = (g^{11})^{1/2} g^{1/4}$ gegeben. Der Vergleich zwischen Kurve 1 und Kurve 2 zeigt, daß das Zusatzpotential praktisch allein durch die Determinante g bestimmt wird.

Fig. 14

Einfluß der Zahl der Freiheitsgrade auf das Zusatzpotential.

Es werden die Zusatzpotentiale verglichen die man erhält, wenn man alle Freiheitsgrade beziehungsweise nur den r-Freiheitsgrad berücksichtigt. Die Barriere im effektiven Potential für die r-Bewegung wird nur von den $\alpha$ - Massen erzeugt.

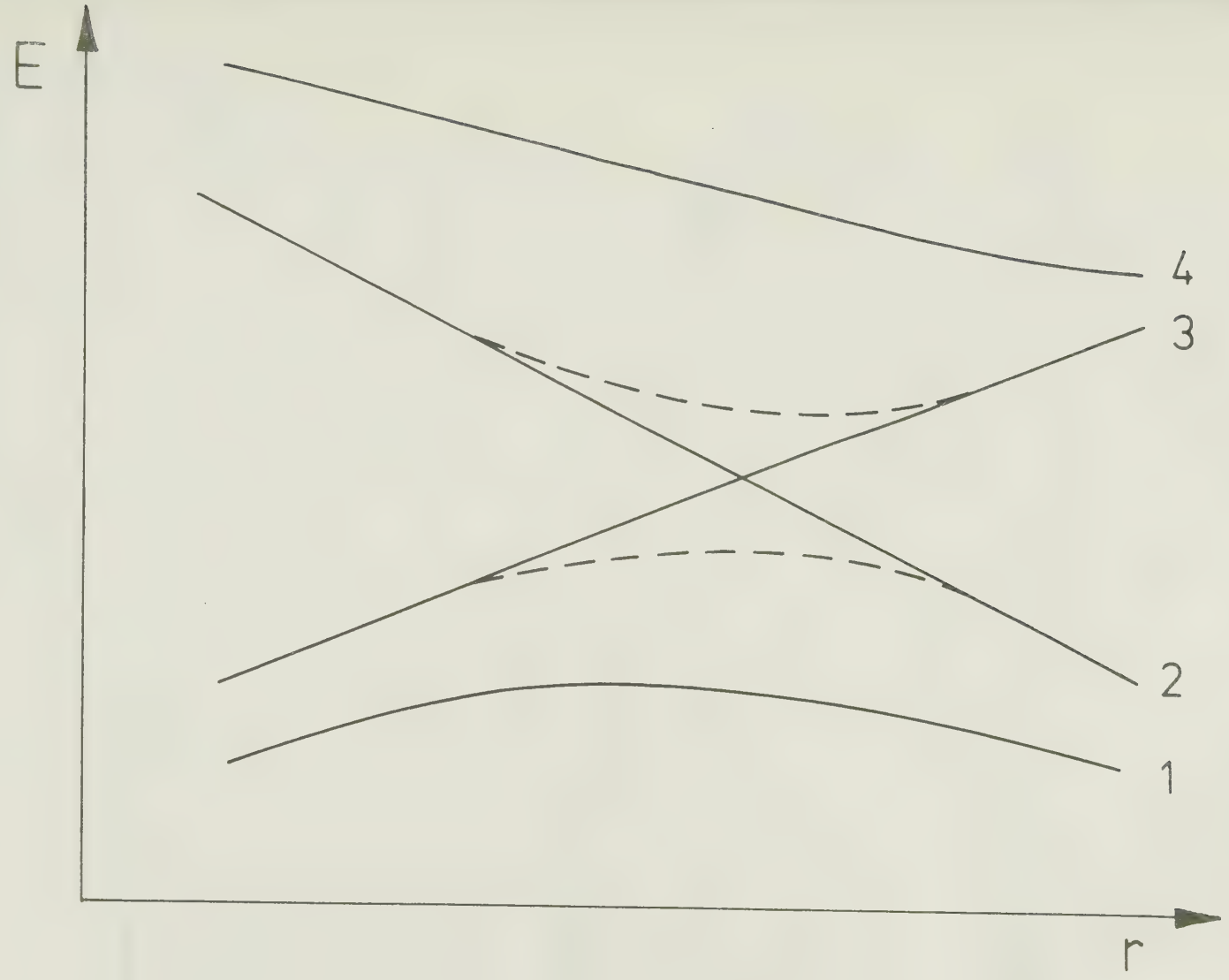



Fig.1

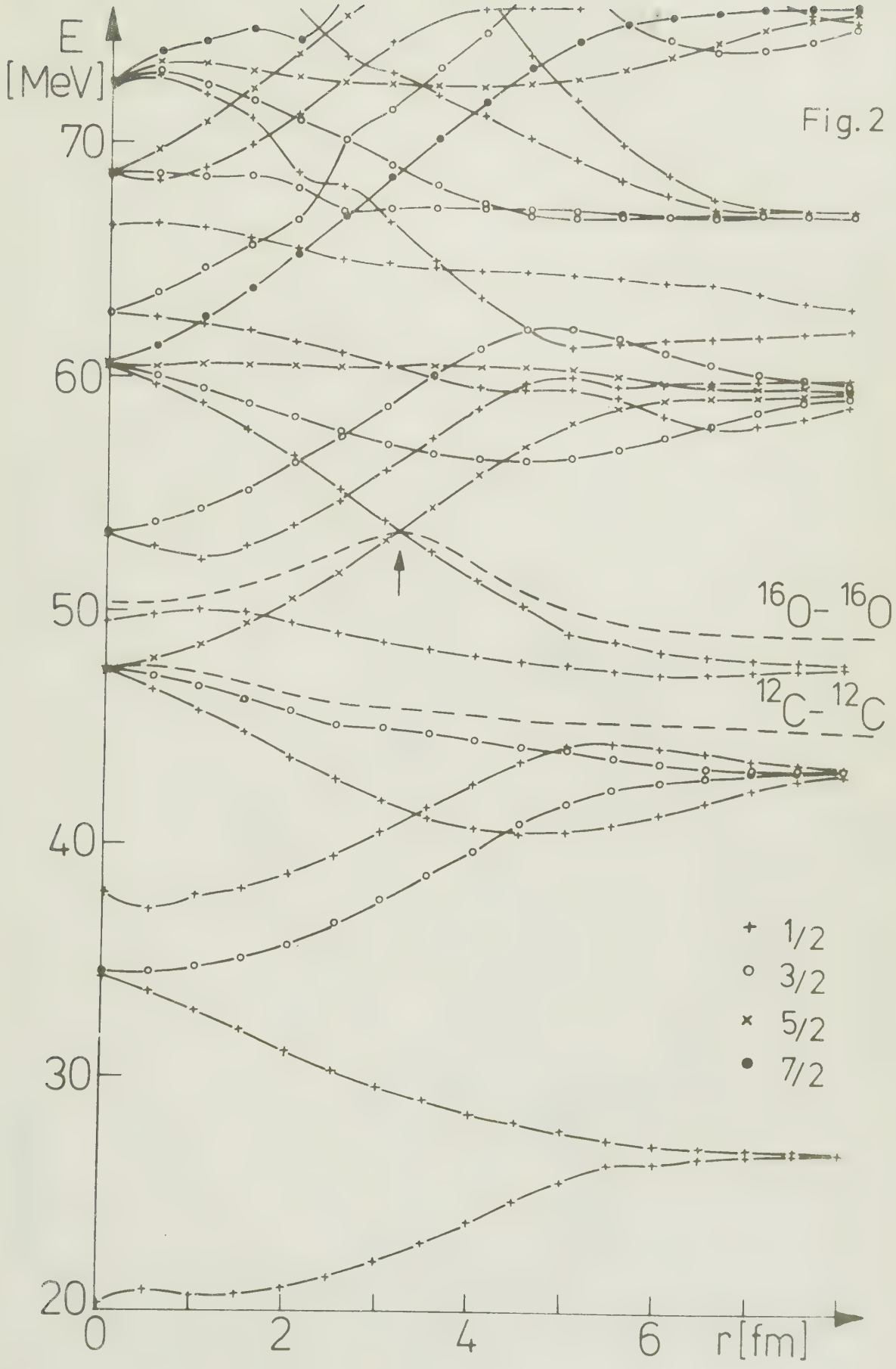



Fig. 2

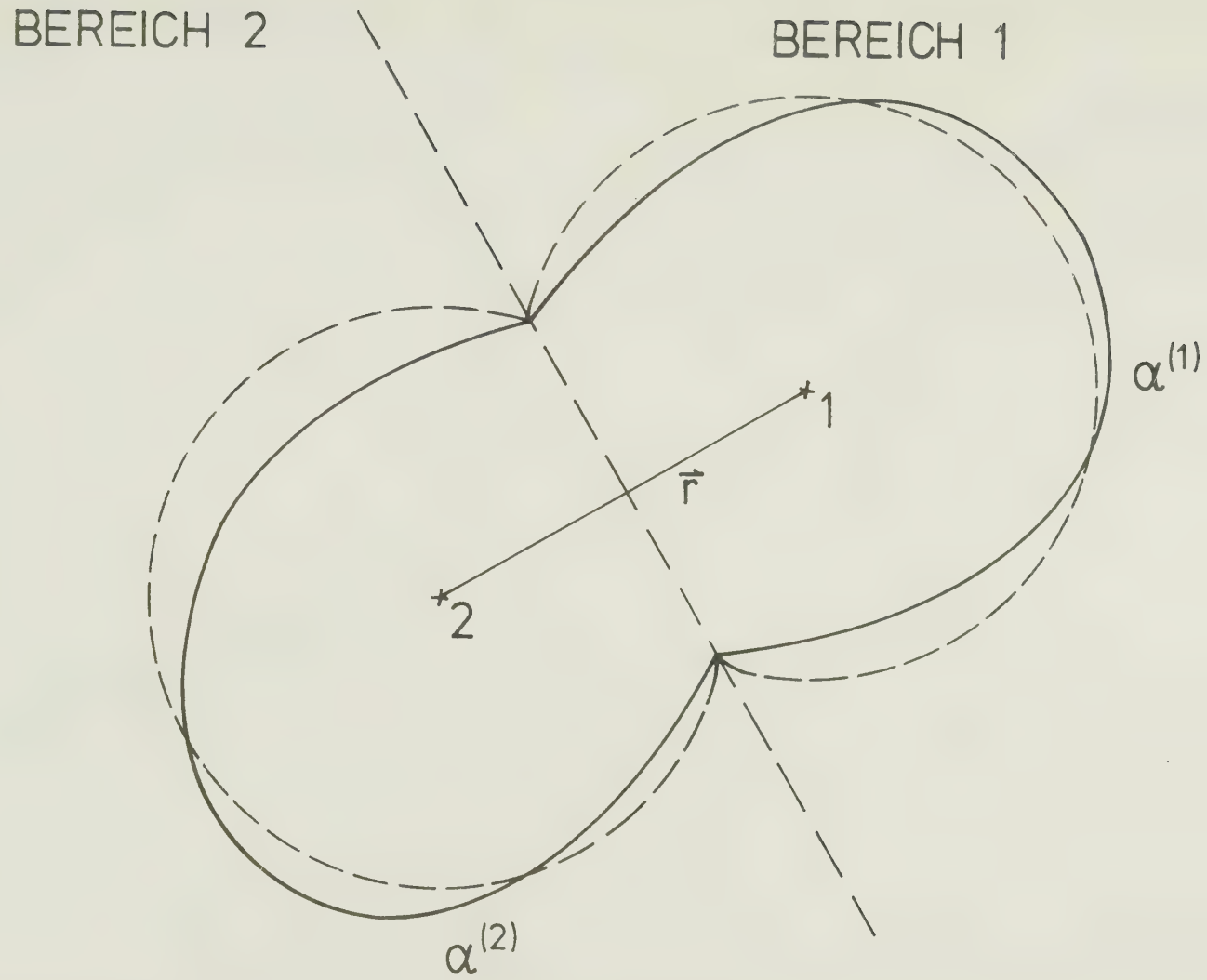
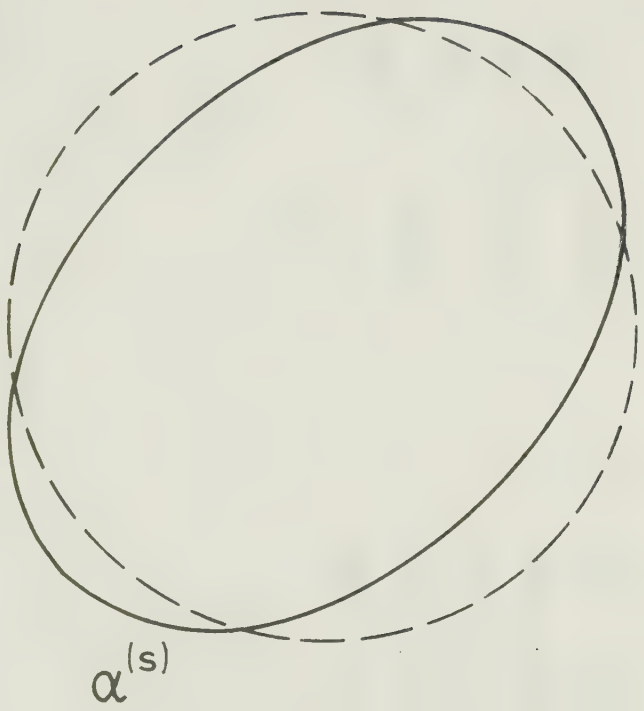
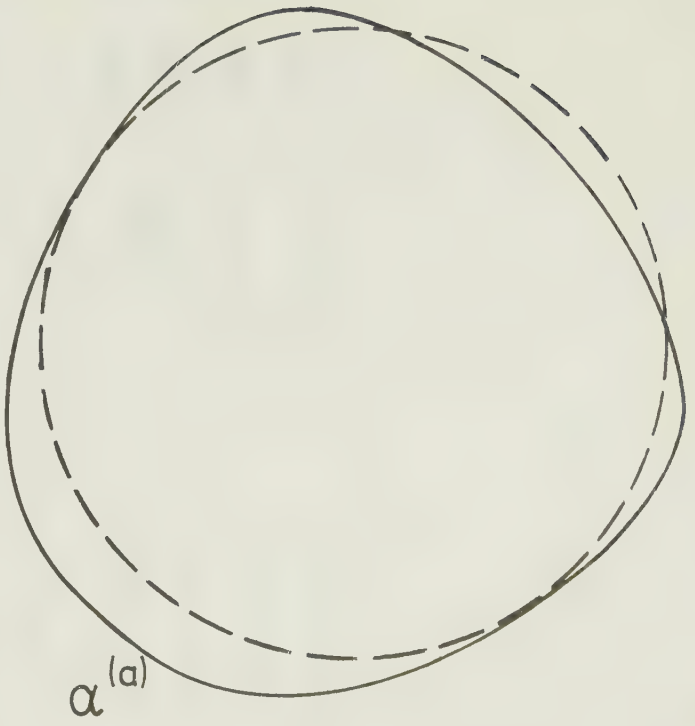



Fig. 3




a)




b)

Fig. 4

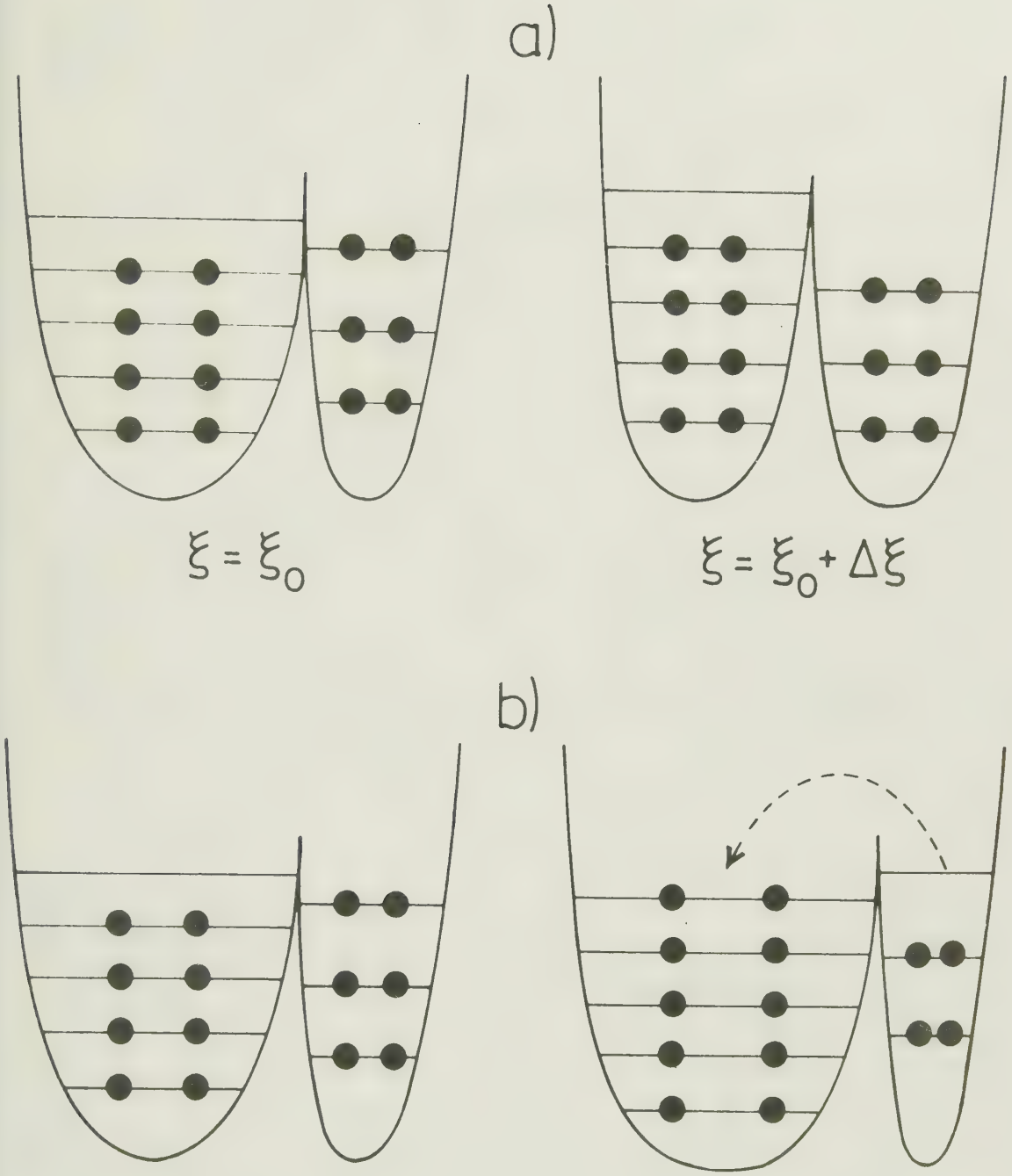
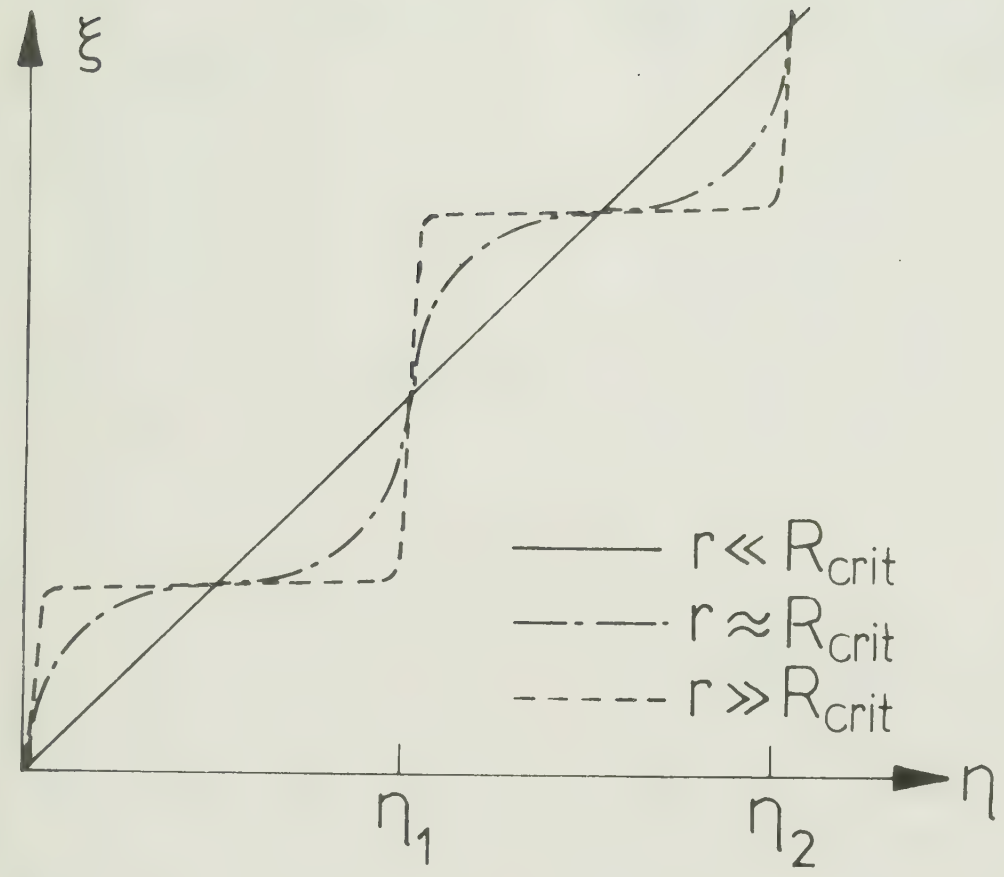



Fig. 5



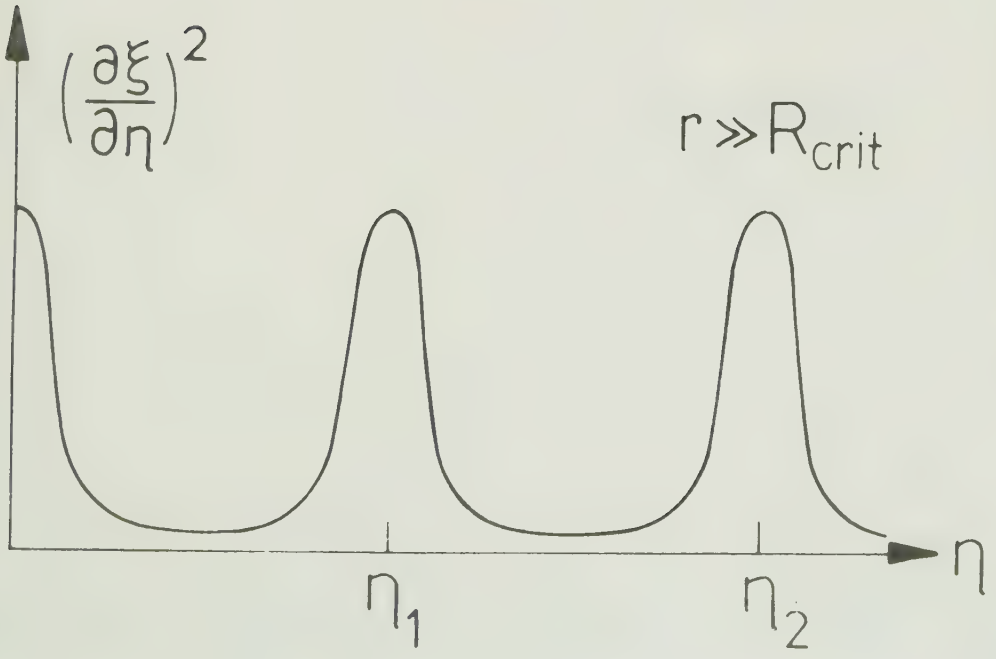




Fig. 6

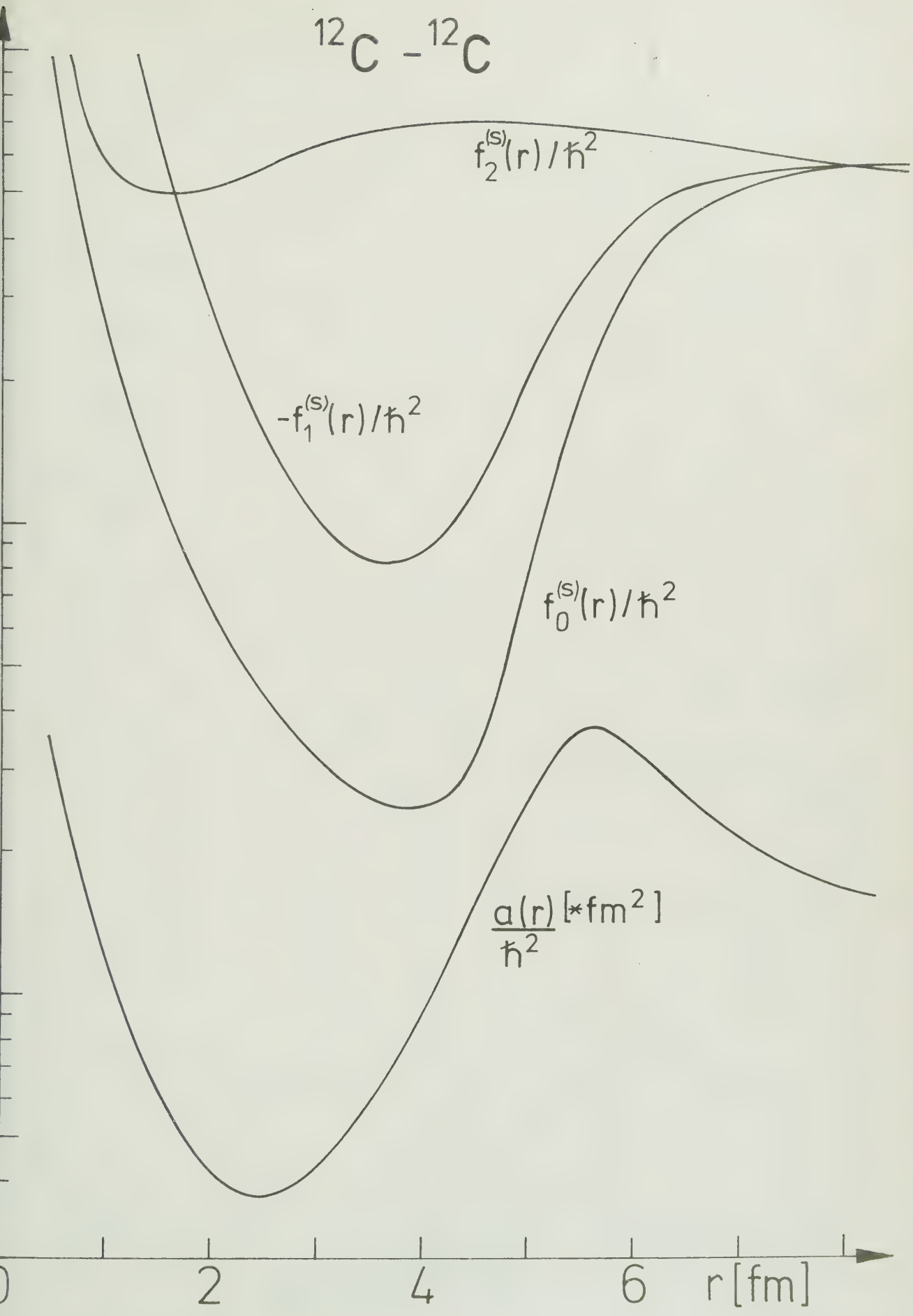

$^{12}C - ^{12}C$
$f_2^{(S)}(r)/\hbar^2$
$-f_1^{(S)}(r)/\hbar^2$
$f_0^{(S)}(r)/\hbar^2$
$\frac{a(r)}{\hbar^2}$ [*fm$^2$]
2
4
6
r[fm]

Fig. 7

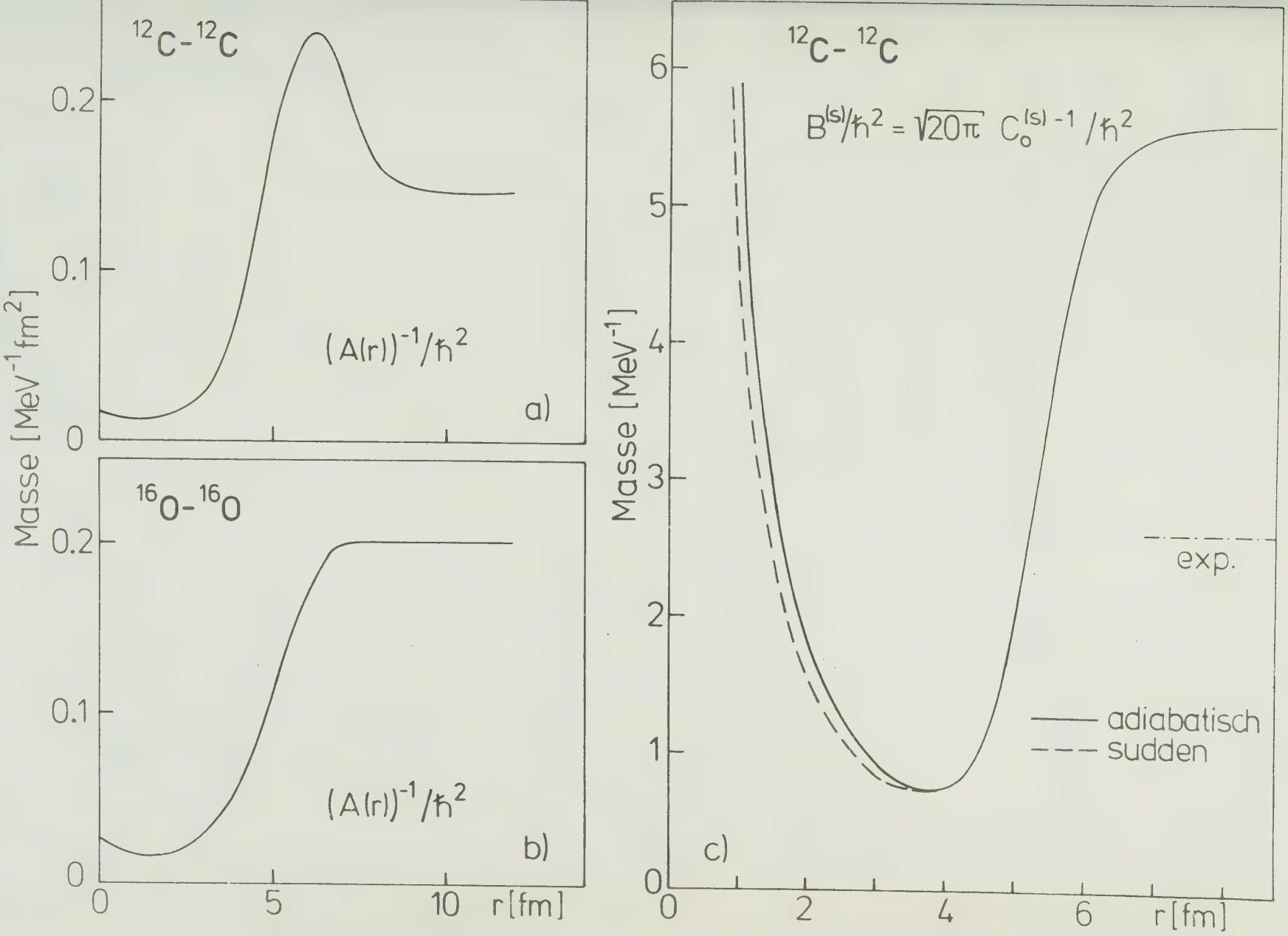
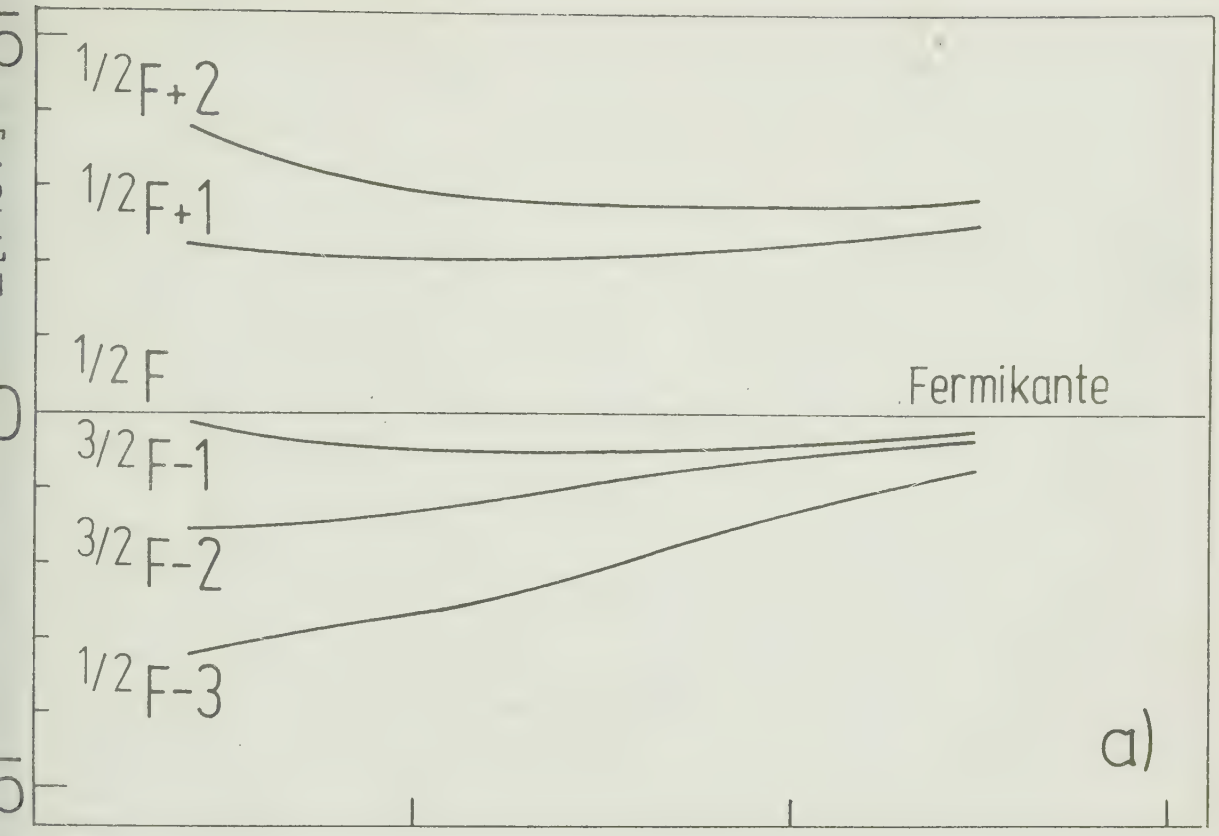

$^{12}C$-$^{12}C$
$(A(r))^{-1}/\hbar^2$
a)
$^{16}O$-$^{16}O$
$(A(r))^{-1}/\hbar^2$
b)
Masse [MeV$^{-1}$fm$^2$]
0
0.1
0.2
5
10
r[fm]
$^{12}C$- $^{12}C$
$B^{(s)}/\hbar^2 = \sqrt{20\pi}\ C_o^{(s)\,-1}/\hbar^2$
exp.
adiabatisch
sudden
c)
Masse [MeV$^{-1}$]
1
2
3
4
5
6
r[fm]

Fig. 8


1/2F+2
1/2F+1
1/2F
Fermikante
3/2F-1
3/2F-2
1/2F-3
a)

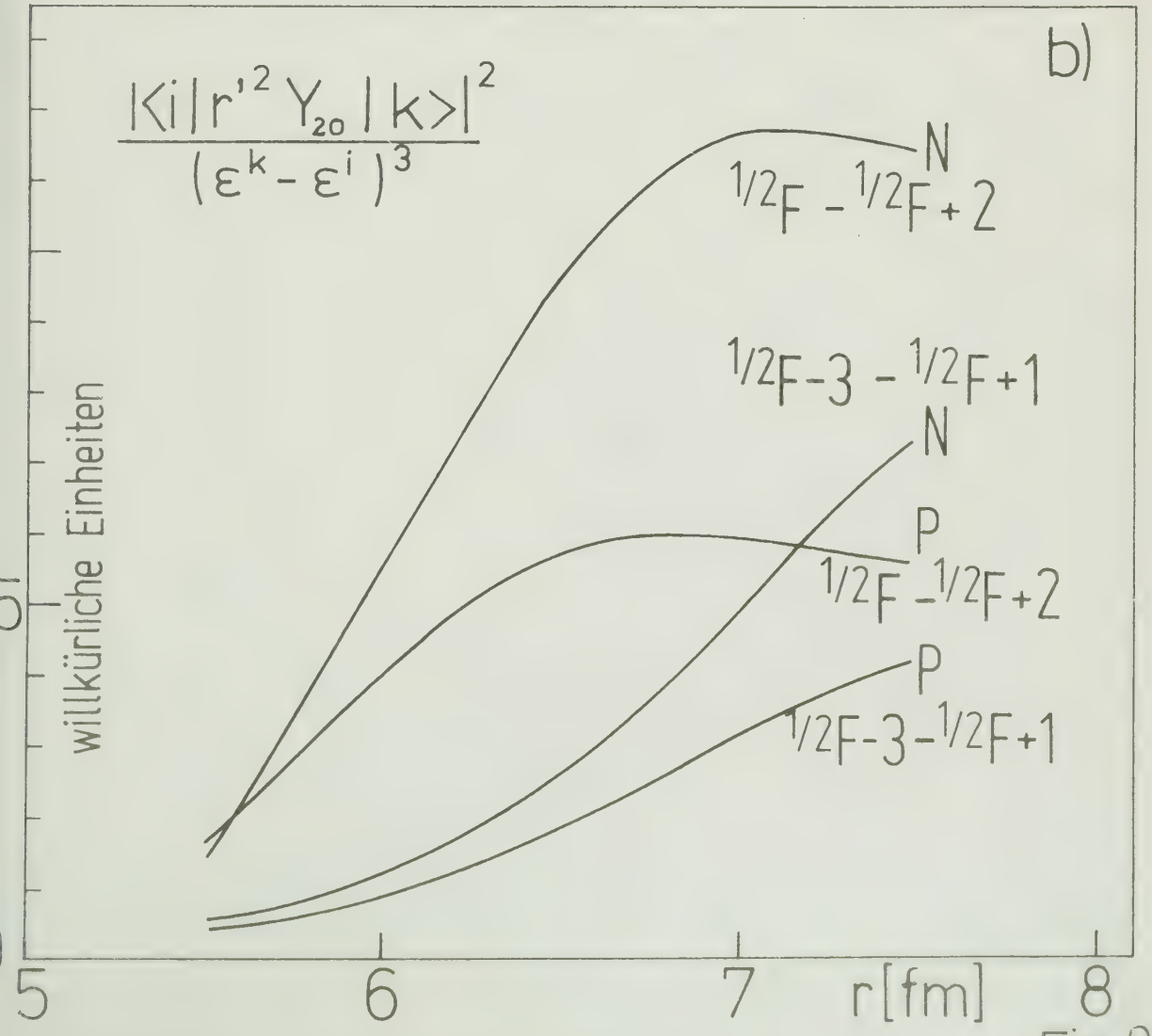

b)
$\frac{|\langle i|r'^2 Y_{20}|k\rangle|^2}{(\varepsilon^k - \varepsilon^i)^3}$
N
1/2F - 1/2F+2
1/2F-3 - 1/2F+1
N
P
1/2F - 1/2F+2
P
1/2F-3 - 1/2F+1
willkürliche Einheiten
5
6
7
r[fm]
8

Fig. 9

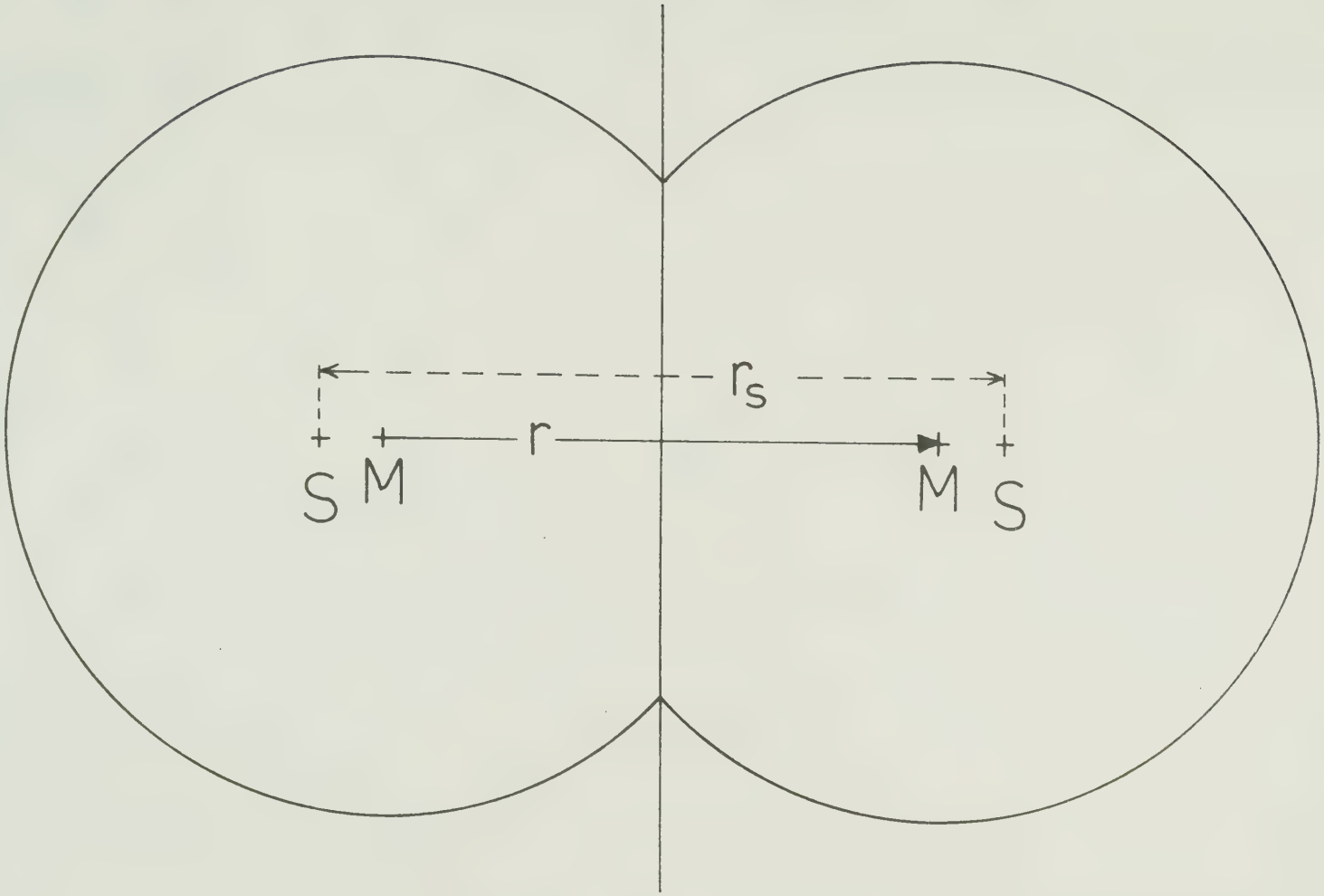



Fig.10

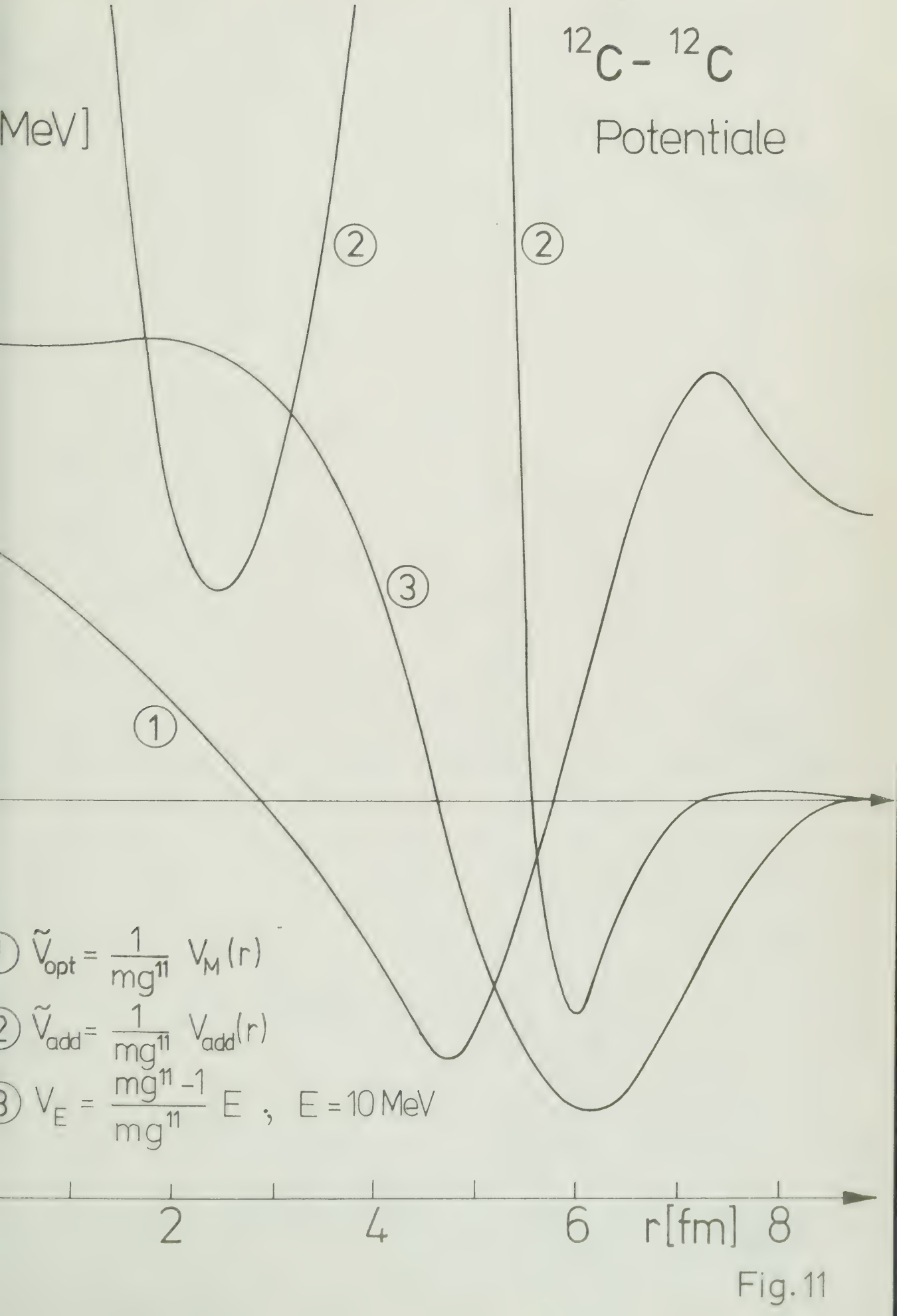

$^{12}C - ^{12}C$
Potentiale
MeV]
②
②
③
①
① $\tilde{V}_{opt} = \frac{1}{mg^{11}} V_M(r)$
② $\tilde{V}_{add} = \frac{1}{mg^{11}} V_{add}(r)$
③ $V_E = \frac{mg^{11}-1}{mg^{11}} E$ ; $E = 10\,MeV$
2
4
6
r[fm]
8

Fig. 11

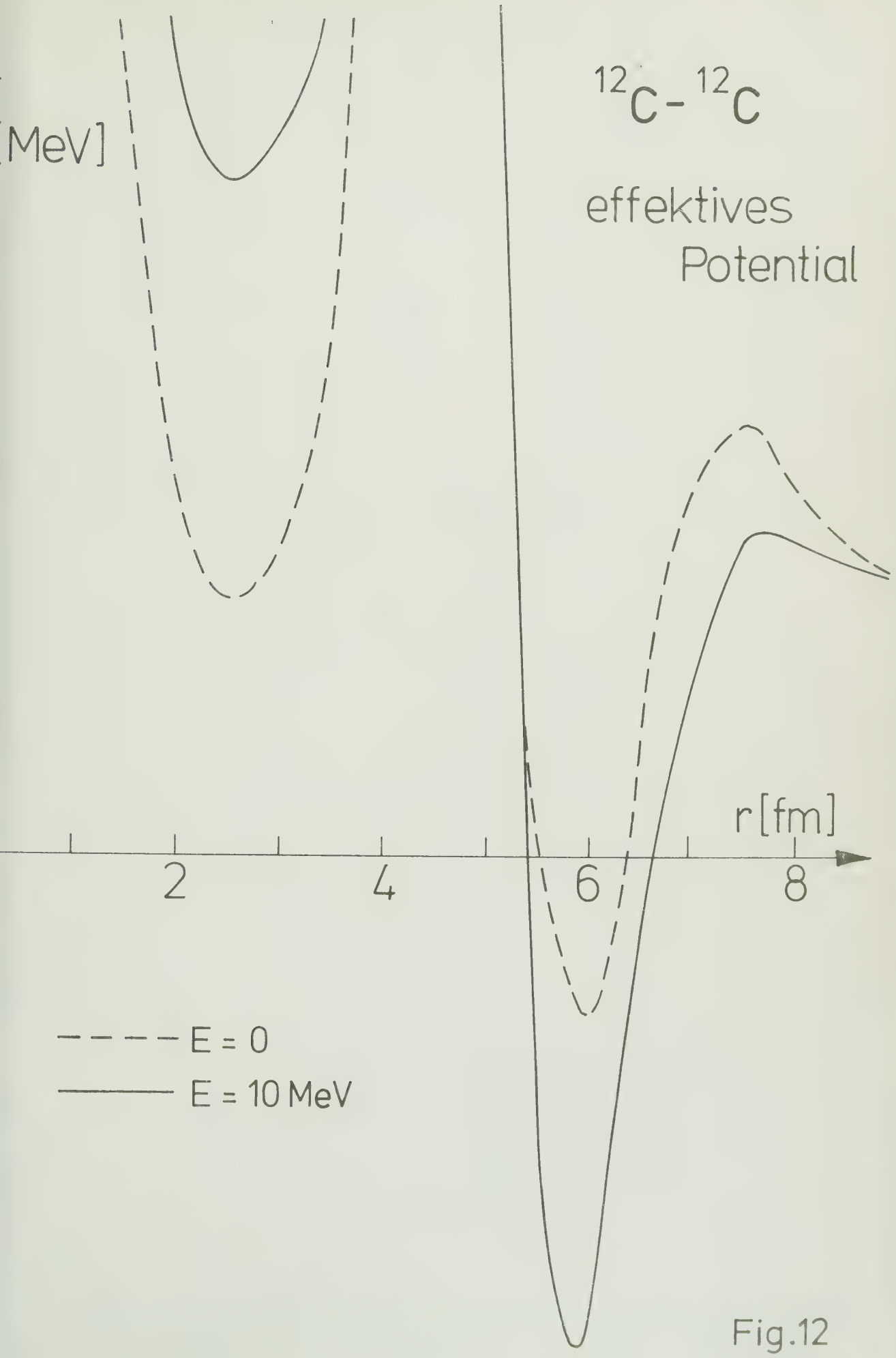



Fig.12

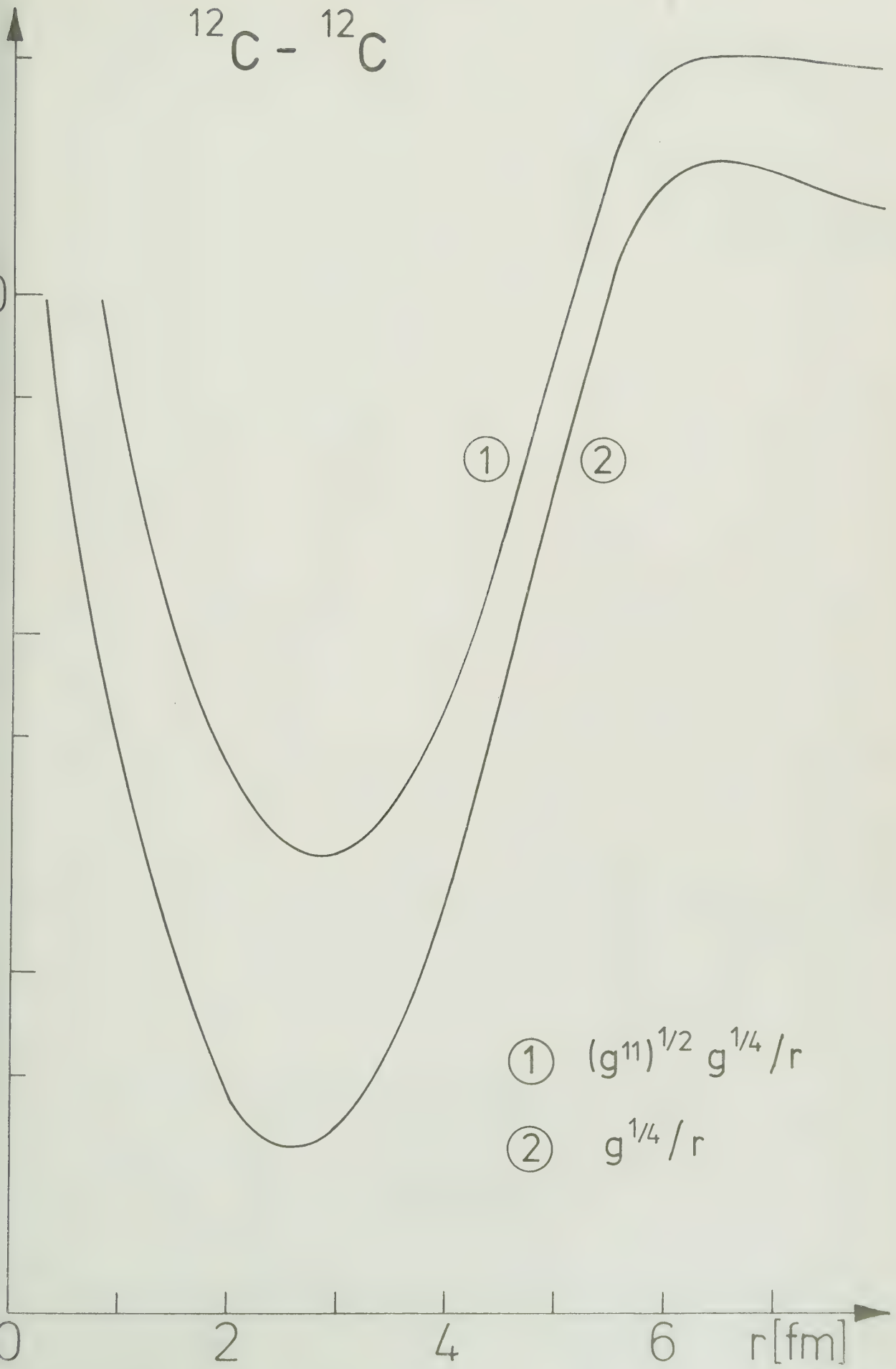



Fig. 13

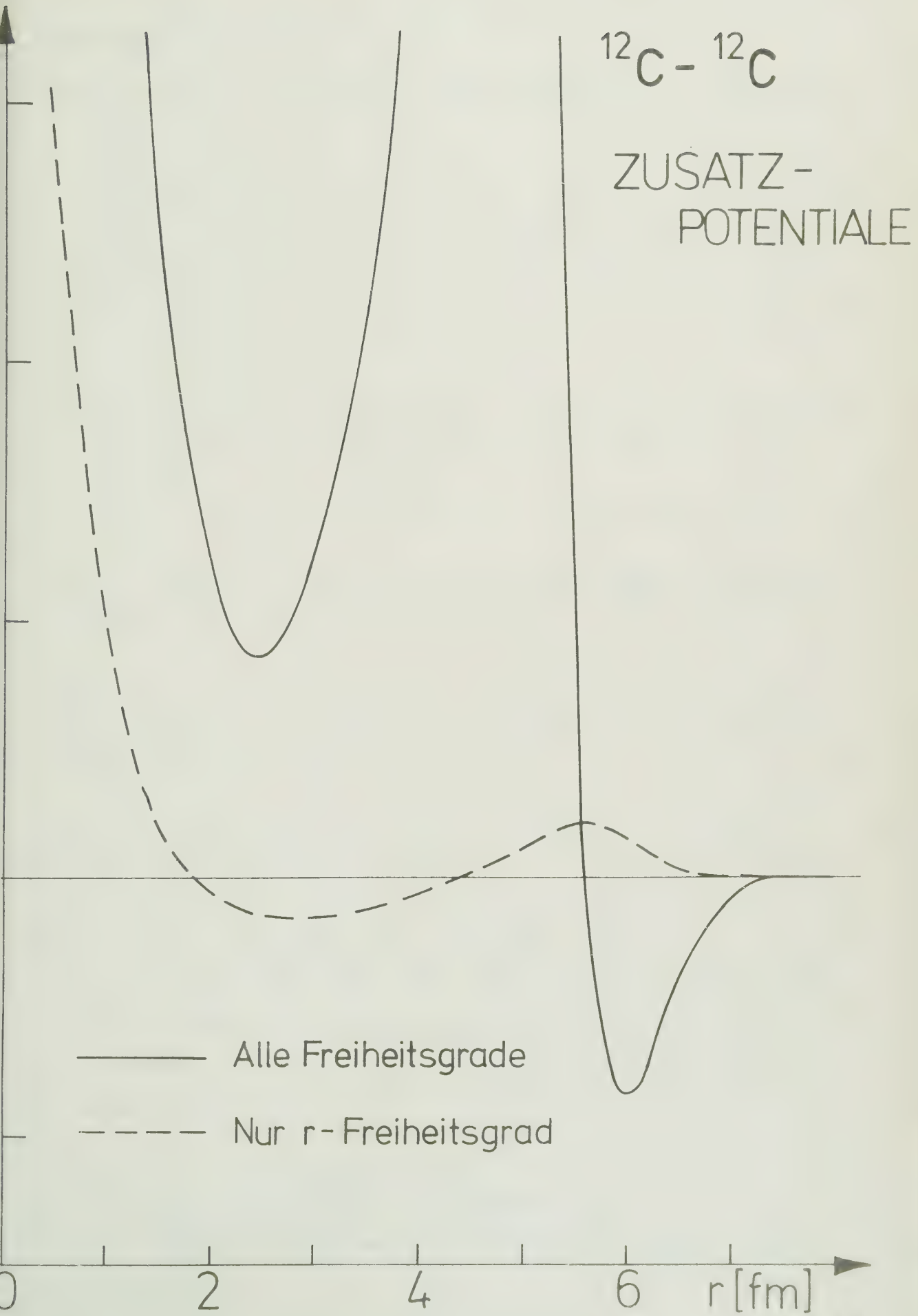

$^{12}C - ^{12}C$
ZUSATZ-
POTENTIALE
Alle Freiheitsgrade
Nur r-Freiheitsgrad
0
2
4
6
r[fm]

Fig. 14

## I. Referenzen

1.) E.Almqvist, D.A. Bromley, J.A. Kuehner, Phys. Rev. Lett. 4 (1960) 515
D.A. Bromley, Int. Conf. on Nucl. Reactions Induced by Heavy Ions, Heidelberg, 1969 (North-Holland, Amsterdam 1970) S. 27
H.Emling, R. Nowotny, D. Pelte und G. Schrieder, Preprint, Max-Planck-Institut, Heidelberg 1973

2.) W. Greiner, Int. Conf. on Nucl. Reactions Induced by Heavy Ions, Heidelberg 1969 (North-Holland, Amsterdam, 1970) Seite 748

3.) G.T. Seaborg, Proc. of the R.A. Welch Foundation Conf. on Transuranic Elements, Houston 1969

4.) P.Lichtner, D. Drechsel, J. Maruhn und W. Greiner, Phys. Rev. Lett. 28 (1972) 829

5.) U. Mosel, Particles and Nuclei, Vol 3 No. 6 (1972) 297

6.) T. Tamura, Rev. Mod. Phys. 37 (1965) 679
B. Imanishi, Phys. Lett. 27B (1968) 267 und Nucl. Phys. A 125 (1969) 33
W. Scheid, W. Greiner und R. Lemmer, Phys. Rev. Lett. 25 (1970) 176

7.) H.J. Fink, Diplomarbeit, Frankfurt/M. 1971
H.J. Fink, W. Scheid und W. Greiner, Nucl. Phys. A 188 (1972) 259

8.) D. Inglis, Phys. Rev. 96 (1954) 1059
T. Belyaev, Kgl. Dansk. Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd. 31, No. 11 (1959)
D.R. Bés, Kgl. Dansk. Vidensk., Selsk., Mat.-Fys. Medd. 33, No. 2 (1961)

9.) P. Lichtner, D. Drechsel, J. Maruhn und W. Greiner, Phys. Lett. 45 B (1973) 175
H.J. Fink, J. Maruhn, W. Scheid und W. Greiner, preprint, Frankfurt/M. 1973

10.) H.J. Lipkin, A. de Shalit und I.Talmi, Nuovo Cimento 2 (1956) 713
F.M.H. Villars und G. Cooper, Ann. of. Phys. 56 (1970) 224

11.) D.L. Hill und J.A. Wheeler, Phys. Rev. 89 (1953) 1102
T. Fliessbach, Nucl. Phys. A 194 (1972) 625
P.K. Haff und L. Wilets, Phys. Rev. C 7 (1973) 951
P.G. Reinhard, N. Rowley und D.M. Brink, preprint, University of Oxford, 1973
P.G. Reinhard, preprint, University of Oxford 1973

12.) J.M. Eisenberg und W. Greiner, "Nuclear Theory", Band 1, (North-Holland Publishing Comp., Amsterdam 1970)

13.) H. Jensen, H. Koppe, Ann. Phys. (NY), 63 (1971) 586

14.) W. Nörenberg, Z. Phys., 260 (1973) 165

15.) H. Hofmann, Z. Phys., 250 (1972) 14

16.) A.R. Edmonds, "Drehimpulse in der Quantenmechanik, B.I. 53/53 a (Hochschultaschenbücherverlag, Mannheim 1964)

17.) J.J. Griffin, Nucl. Phys. A 170 (1971) 395
J.J. Griffin, Symp. on Phys. and Chem. of Fission, (Into Atomic Energy Agency, Vienna 1969), Seite 3

18.) G. Baumgärtner, P. Schuck, "Kernmodelle", B.I. 203/203 a (Hochschultaschenbücherverlag, Mannheim 1968), Seite 180
J. Eichler, Symp. on four Nucl. Cor. and Alpha Rot. Structure, (R. Stock, Marburg 1972), Seite 52

19.) C. Zener, Proc. Roy. Soc., Ser. A 137 (1932) 696

20.) D. Scharnweber, U. Mosel und W. Greiner, Phys. Rev. Lett. 24 (1970) 601
M.G. Mustafa, U. Mosel und H.W. Schmitt, Phys. Rev. Lett. 28 (1972) 1536
H.C. Pauli, T. Ledergerber und M. Brack, Phys. Lett. 34 B (1971) 265

21.) J. Maruhn, Diplomarbeit, Frankfurt/M. 1971
J. Maruhn und W. Greiner, Z. Phys. 251 (1972) 431

22.) H. Holm, D. Scharnweber, W. Scheid und W. Greiner, Z. Phys. 231 (1970) 450
H. Holm und W. Greiner, Nucl. Phys. A 195 (1972) 333

23.) A. Kappatsch, private Mitteilung

24.) Regnarsson, Contr. to the Int. Conf. on the Prop. of Nucl. far from the Region of Beta Stability, Leysin, Schweiz, 31.8.1970, S. 847
T.W. Donelly, G.E. Walker, Phys. Rev. Lett. 22 (1969) 1121

25.) H. Müller, Diplomarbeit, Frankfurt/M. 1972
H. Müller, W. Scheid und W. Greiner, preprint, Frankfurt/M. 1973

26.) K. Pruess und W. Greiner, Phys. Lett. 33 B (1970) 197

27.) K. Pruess, Nucl. Phys. A 170 (1971) 336

28.) J. Maruhn und W. Greiner, Phys. Lett. 44 B (1973) 9

29.) T. Morović, B. Fink, H.J. Fink, Contr. to the Int. Conf. of Nucl. Phys., München 1973 (North-Holland Publ. Comp. , Amsterdam)
T. Morović, private Mitteilungen

30.) V. M. Strutinsky, Nucl. Phys. A 95 (1967) 420
V. M. Strutinsky, Nucl. Phys. A 122 (1968) 1

31.) R. Adler, M. Bazin und M. Schiffer, "Introduction to General Relativity", (Mc Graw-Hill Book Comp., New York, 1965), Seite 134
H. Teichmann, "Physikalische Anwendung der Vektor und Tensorrechnung", B.I. 39/39 a (Hochschultaschenbücherverlag, Mannheim 1964)

32.) A. Khan, private Mitteilungen

33.) C.Y. Wong, Nucl. Data A 4 (1968), 271
S.J. Skorka, J. Hertel und T.W. Retz-Schmidt,
Nucl. Data A 2 (1966) 347

34.) A. Liran, private Mitteilungen
O. Zohni, private Mitteilungen

Mein Dank gilt meinem Lehrer, Herrn Prof. Dr. W. Greiner, der diese Arbeit anregte und ihre Ausführung durch seine stete Anteilnahme unterstützte.

Weiterhin bin ich Herrn Prof. Dr. W. Scheid zu besonderem Dank verpflichtet. Mit ihm konnte ich in zahlreichen Diskussionen viele offene Fragen klären.

Die benötigte Rechenzeit wurde mir freundlicherweise vom Z. R. I. der Universität Frankfurt auf einer UNIVAC 1108 zur Verfügung gestellt.

Lebenslauf

Am 13.4.49 wurde ich, Hans-Joachim Fink, als Sohn des kaufmännischen Angestellten Erich Fink und seiner Ehefrau Magdalena geb. Born in Frankfurt/M.-Höchst geboren. Von Ostern 1955 an besuchte ich die Volksschule in F.-Höchst, bis ich Ostern 1956 in die Volksschule von F.-Zeilsheim umgeschult wurde. 1959 wechselte ich in das Leibniz-Gymnasium in F.-Höchst über, wo ich im Juni 1967 das Abitur ablegte. Im Wintersemester dieses Jahres begann ich das Physikstudium an der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt/M., an der ich im Sommer 1969 die Diplomvorprüfung für Physiker ablegte. Anschließend verfaßte ich am Institut für theoretische Physik der Universität Frankfurt/M. unter Anleitung von Prof. Dr. W. Greiner meine Diplomarbeit und bestand im Juli 1971 die Diplomprüfung für Physiker. Seit dieser Zeit bin ich an diesem Institut als wissenschaftlicher Angestellter beschäftigt.

Meine akademischen Lehrer waren:

Prof. Dr. R. Bass
Prof. Dr. W. Franz
Prof. Dr. W. Greiner
Prof. Dr. G. Köthe
Prof. Dr. W. Martienssen
Prof. Dr. H. J. Queisser
Prof. Dr. P. Royen
Prof. Dr. W. Scheid
Prof. Dr. W. Schopper
Prof. Dr. C. Toeppfer